Подготовка к ЕГЭ 2014, стереометрия

Интерактивный комплект

3. Проекции и расстояния

3.2. Расстояние между прямыми

Пособие содержит описание методов расчёта, примеры объяснений как использовать интерактивный рисунок на уроке. Приводятся примеры решения задач о скрещивающихся прямых, диагоналях, медианах внутри куба и тетраэдра.

Оглавление раздела

Вход в интерактивные файлы выполняется с помощью щелчка по рисунку. Чтобы рисунки из комплекта ожили, установите на Вашем компьютере программу GInMA с сайта http://deoma-cmd.ru/Products/Geometry/GInMA.aspx **Бесплатная базовая версия** комплекта позволяет ознакомиться с возможностями пособия. Во всех файлах доступны первые шаги решений задач с условием и исходным интерактивным чертежом, в отдельных файлах доступны все шаги решения вплоть до ответа. Для полноценного использования комплекта рекомендуем его купить. **Покупка даст возможность видеть все шаги решения в интерактивном файле и сохранять созданные Вами варианты заданий.**

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между любыми объектами – это наименьшее расстояние между парой точек, размещенных по одной на этих объектах. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине отрезка общего перпендикуляра к этим прямым.

Для того, чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, достаточно ***провести плоскость, перпендикулярную одной из них, и найти расстояние между точкой, являющейся изображением этой прямой, и изображением второй прямой***.

Для поиска расстояния между прямыми может оказаться полезной формула, связывающая высоту прямоугольного треугольника h с катетами a и b:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}. \tag{1}$$

Для поиска отношения отрезков в ряде задач полезна формула связывающая отношение длин отрезков m и n, на которые высота прямоугольного треугольника с катетами a и b делит гипотенузу:

$$\frac{m}{n}=\frac{a^2}{b^2}. \tag{2}$$

Векторный метод

Пусть первая прямая задана точкой $\vec{L}$ на прямой и единичным вектором $\vec{p}$, направленным вдоль прямой. Вторая прямая задана точкой $\vec{M}$ и единичным вектором $\vec{q}$. Пусть AB – общий перпендикуляр, длина отрезка LA равна x, длина MB равна y. Тогда:

$$\begin{cases}\vec{L}+x\vec{p}=\vec{A},\\ \vec{M}+y\vec{q}=\vec{B}.\end{cases} \text{ Значит, } \vec{A}-\vec{B}=\vec{L}-\vec{M}+x\vec{p}-y\vec{q}.$$

Вектор AB перпендикулярен как $\vec{p}$, так и $\vec{q}$, его скалярное произведение на каждый из этих векторов равно нулю:

$$\begin{cases}(\vec{A}-\vec{B})\vec{p}=0,\\ (\vec{A}-\vec{B})\vec{q}=0,\end{cases} \quad \begin{cases}(\vec{L}-\vec{M}+x\vec{p}-y\vec{q})\cdot\vec{p}=0,\\ (\vec{L}-\vec{M}+x\vec{p}-y\vec{q})\cdot\vec{q}=0,\end{cases} \quad \begin{cases}(\vec{L}-\vec{M})\cdot\vec{p}+x-y\vec{p}\cdot\vec{q}=0,\\ (\vec{L}-\vec{M})\cdot\vec{q}+x\vec{p}\cdot\vec{q}-y=0.\end{cases}$$

$$x=\frac{(\vec{M}-\vec{L})(\vec{p}-\vec{q}(\vec{p}\cdot\vec{q}))}{1-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}.$$

$$\vec{A}=\vec{L}+\vec{p}\,\frac{(\vec{M}-\vec{L})(\vec{p}-\vec{q}(\vec{p}\cdot\vec{q}))}{1-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}, \qquad \vec{B}=\vec{M}+\vec{q}\,\frac{(\vec{L}-\vec{M})(\vec{q}-\vec{p}(\vec{p}\cdot\vec{q}))}{1-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}. \tag{3}$$

Задание 1

Задача 1. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Шаг 1. Задание. На интерактивном рисунке точки ***L*** и невидимое начало координат задают прямую ***l***, точки ***M*** и ***M'*** задают прямую ***m***. Точки ***A*** на прямой ***l*** и ***B*** на прямой ***m*** подвижны. Указано расстояние между точками ***A*** и ***B***.

Исследование. Выберите положение прямых, пользуясь точками ***L***, ***M*** и ***M'***. Затем, перемещая точки ***A*** и ***B*** по прямым, попытайтесь минимизировать расстояние между ними.

Шаг 2. Сравните истинное положение отрезка наименьшей длины и найденное Вами положение. Переместив точки ***A*** и ***B*** в положение ***A'*** и ***B'*** убедитесь, что длина отрезка ***A'B'*** не больше, чем длина отрезка ***AB.*** Вернитесь на ***Шаг 1***, сдвиньте прямые и повторите исследование.

Шаг 3. Проверьте, что отрезок ***A'B'*** перпендикулярен к каждой из прямых. Исследуйте, как выглядит общий перпендикуляр к прямым при обзоре с разных направлений.

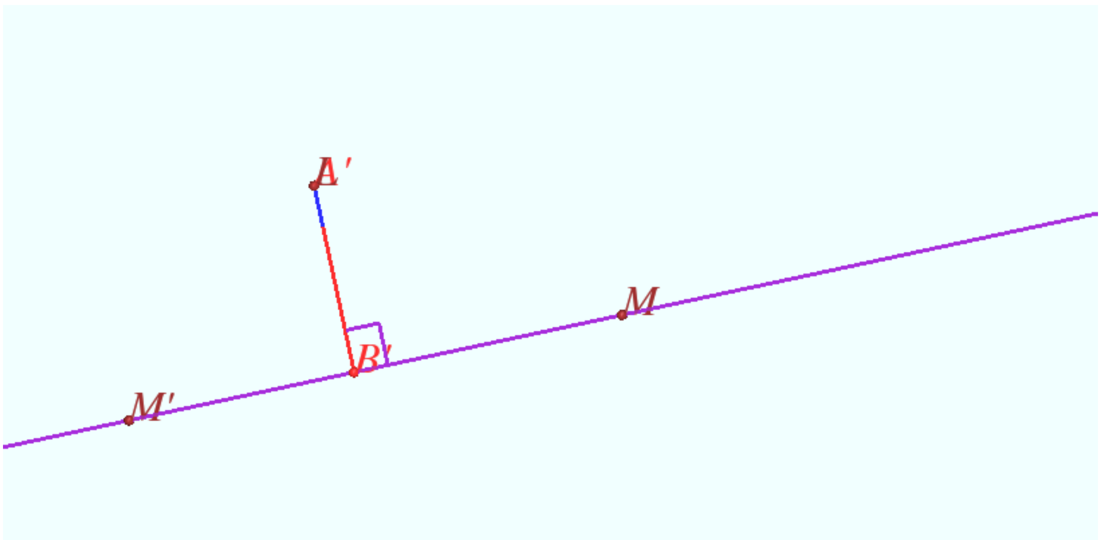

Рис. 1. Расстояние между скрещивающимися прямыми (исследование)

Задание 2

Расстояние между скрещивающимися прямыми (метод проекций)

Задание Докажите, что расстояние между заданными скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную её плоскость, до проекции другой прямой на эту же плоскость.

Шаг 1. Пользуясь точками ***A, B, C*** и ***D***, задайте две скрещивающиеся прямые. Найдите расстояние между построенными прямыми.

Шаг 2. Решение. Построена плоскость ***P***, содержащая точку ***A*** и перпендикулярная прямой ***AB***. Эта плоскость пересекает ***CD*** в точке ***E***.

Шаг 3. Проекция ***CD*** на плоскость ***P*** – это прямая ***EF***, где ***F*** – проекция произвольной точки прямой ***CD*** на плоскость ***P***,

Шаг 4. Строим проекцию ***H*** точки ***A*** на прямую ***EF***.

Шаг 5. Пусть точка ***X*** движется вдоль прямой ***AB***, а отрезок ***XY*** равен и параллелен отрезку ***AH***. Ищем то положение точки ***X***, при котором точка ***Y*** окажется на прямой ***CD***. Можно ли утверждать, что существует такое положение ***L*** точки ***X***, при котором точка ***Y*** находится на прямой ***CD***?

Шаг 6. Пусть точка ***K*** это точка пересечения прямой ***CD*** и перпендикуляра ***KH*** к плоскости ***P***. Пусть ***LK||AH***. Тогда ***LK = AH*** и ***LK*** перпендикулярно как прямой ***AB***, так и прямой ***CD.***

Шаг 7. Длину любого отрезка соединяющего точки на прямых ***AB*** и ***CD***, отличного от ***KL***, определяем по теореме Пифагора. Она больше чем ***KL***, так как ***KL*** оказывается катетом, а искомое расстояние — гипотенузой прямоугольного треугольника. Значит ***KL*** по определению это расстояние между ***AB*** и ***CD***.

Шаг 8. Чтобы найти расстояние от прямой ***AB*** до прямой ***CD*** достаточно найти расстояние от ***AB*** до проекции прямой ***CD*** на плоскость, перпендикулярную ***AB***.

Шаг 9. Чтобы найти расстояние от прямой ***AB*** до прямой ***CD*** достаточно рассмотреть проекцию вдоль ***AB*** и найти расстояние от точки, изображающей эту прямую до изображения прямой ***CD***.

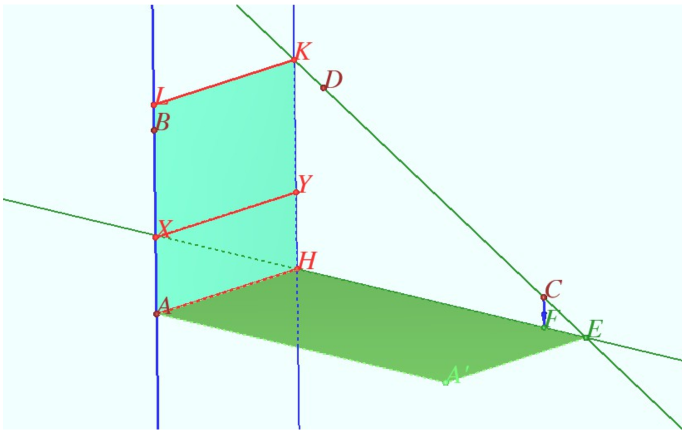

Рис. 2. Расстояние между скрещивающимися прямыми (метод проекций)

Задание 3

Расстояние между скрещивающимися прямыми (вспомогательные плоскости)

Шаг 1. Задание Пользуясь точками ***A, B, C*** и ***D***, задайте две скрещивающиеся прямые. Найдите расстояние между построенными прямыми, пользуясь вспомогательной плоскостью ***ABC***.

Шаг 2. Решение. Построена плоскость ***ABC***, содержащая точку ***C*** и прямую ***AB***. Эта плоскость пересекает прямую ***CD*** в точке ***C***.

Шаг 3. В плоскости ***ABC*** через точку ***C*** проведена прямая ***l***, параллельная прямой ***AB***.

Шаг 4. Построена плоскость ***П***, содержащая прямые ***CD*** и ***l***.

Шаг 5. Построена плоскость ***П'***, содержащая прямую ***AB*** и параллельная плоскости ***П***.

Шаг 6. Точка ***E*** может передвигаться в плоскости ***П*** по прямой ***CD***. Точка ***F*** – это основание перпендикуляра, опущенного из точки ***E*** на плоскость ***П'***.

Шаг 7. При движении точки ***E***, точка ***F*** перемещается по прямой не параллельной ***AB***. Значит, существует такое положение точки ***E***, что точка ***F*** находится на ***AB***.

Шаг 8. Расстояние между точками на прямых не может быть меньше, чем расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые. Значит, ***EF*** – это расстояние между прямыми ***AB*** и ***CD***.

Шаг 9. Чтобы найти расстояние от прямой ***AB*** до прямой ***CD*** достаточно найти расстояние между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые.

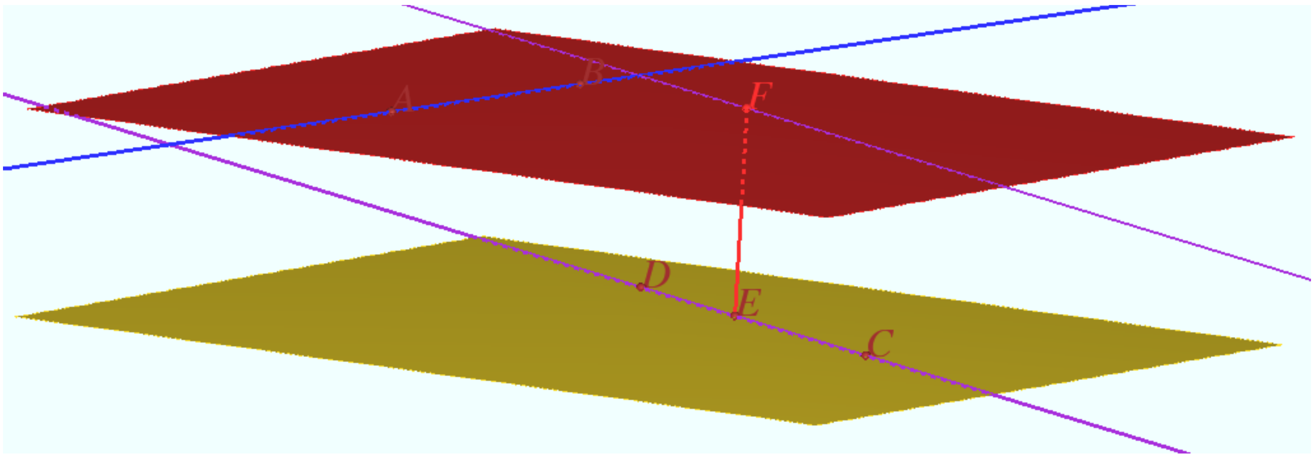

Рис. 3. Расстояние между скрещивающимися прямыми (вспомогательные плоскости)

Задание 4

Расстояние между диагональю куба и диагональю грани куба

Шаг 1. Задание. Найдите расстояние между диагональю ***BD'*** единичного куба ***ABCDA'B'C'D'*** и диагональю ***AB'*** грани ***AA'B'B,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр делит диагонали.

Шаг 2. Решение. Пользуемся формулами (1) и (2) и свойством проекции: проекция точки отрезка делит проекцию отрезка в том же отношении, что и точка делит отрезок. Пусть ***EF*** – отрезок общего перпендикуляра к данным диагоналям, точка ***E*** лежит на диагонали ***BD'***. Рассмотрим вид вдоль ***AB'***. ***A'B***$\perp$***AB'***, значит, в этом виде $A'B=\sqrt{2}, u=(AB)=\frac{A'B}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Запись (***AB***) означает длину проекции ***AB*** на плоскость, перпендикулярную направлению ***AB'***. ***AD***$\perp$***AB'***, значит, в этом виде ***AD*** = 1, ***v*** = (***AO***) = 0,5. Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника со сторонами $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{1}{2}$: : $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=2+4, h=\sqrt{\frac{1}{6}}$.

Шаг 3. Отношение $\frac{BE}{OE}=\frac{(BE)}{(OE)}=\frac{u^2}{v^2}=2,$. $\frac{ED}{BE}=\frac{OD+OE}{BE}=\frac{BE+EO+EO}{BE}=1+2\frac{EO}{BE}=2$.

Шаг 4. Чтобы найти ***AF*** **:** ***B'F*** рассмотрим вид вдоль ***BD'***. Куб превращается в правильный шестиугольник. Отрезок ***EF*** проецируется на диагональ ромба ***A'D'DA***. Диагонали ромба в точке пересечения делятся пополам, значит, ***AF : B'F = (AF) : (B'F) = 1.***

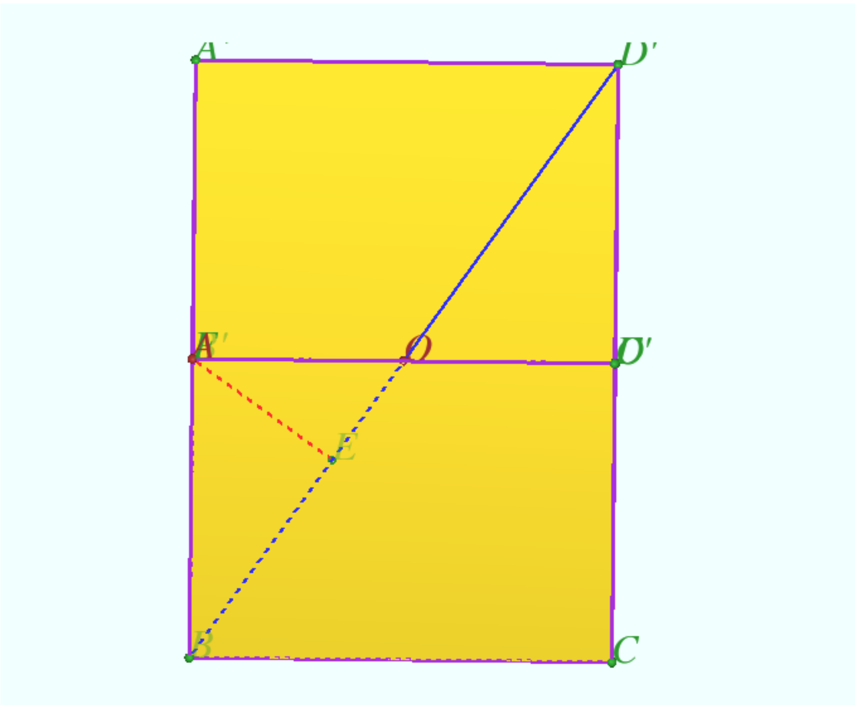

Рис. 4. Расстояние между диагональю куба и диагональю грани куба

Задание 5

Расстояние между скрещивающимися диагоналями граней куба

Шаг 1. Задание. Найдите расстояние *EF* между диагональю *AB′* грани *AA′B′B* единичного куба *ABCDA′B′C′D′* и диагональю *BD* грани *ABCD*. Точка *E* лежит на *AB′*, *F* – на *BD*, соответственно.

Шаг 2. Решение. Выполним симметрию куба относительно прямой *BD*. Вне России такую симметрию называют «half-turn», то есть полуповорот. Вы можете наблюдать на интерактивном рисунке это движение пространства. Заметим, что точки *F, A, B, A′, B′, E* перейдут в точки *F, C, B*, A'_1, B'_1, E_1, соответственно. Важно, что точки *E, F* и E_1 лежат на прямой, так как отрезок *EF* перпендикулярен *BD* и при повороте на 180° перейдёт в своё продолжение.

Шаг 3. Выполним симметрию куба относительно прямой *AB′*. Аналогично получим, что точки *E, A, B, C, D, F* перейдут в точки *E, A, A′*, C_2, D_2, F_2, соответственно, причём EFF_2 прямая, так как отрезок *EF* перпендикулярен *AB′*.

Шаг 4. $A'D_2 = B'C = \sqrt{2}$, так как эти отрезки являются диагоналями граней единичного куба. $A'D_2 \| B'C$, так как они лежат в параллельных плоскостях *AA′D* и *BB′C* и наклонены под одинаковым углом 45° к параллельным прямым *AA′* и *CC′*. $A'C = \sqrt{3}$, так как это диагональ единичного куба. По теореме Пифагора найдём, что $A'B_1 = CD_1 = \sqrt{5}$ как гипотенузы треугольников с катетами 2 и 1. Каждый из этих отрезков пересекает *AB* в середине точке *P*.

Шаг 5. Параллелограмм с равными диагоналями $A'CB_1'D_2$ – это прямоугольник. $E_1F_1 \perp A'D_1$, лежит в плоскости ACD_1, значит $E_1F_1 \| A'C$ и $E_1F_1 = A'C$. По свойствам симметрии, $EF = E_1F = EF_1$, следовательно, $EF = \frac{A'C}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Шаг 6. Плоскость $A'CD_1$ пересекает плоскость *AA′B* по медиане *AP,* а отрезок *AB′* в единственной точке *E*. Отрезок FF_1, лежащий в этой плоскости, тоже пересекает *AB′*, значит, именно в точке *E*. Значит, медиана *A′P* пересекает диагональ *AB′* в точке *E*.

Шаг 7. Из равенства $2AP = A'B'$ и параллельности $AP \| A'B'$, следует: $B'E : AE = A'B' : AP = 2$.

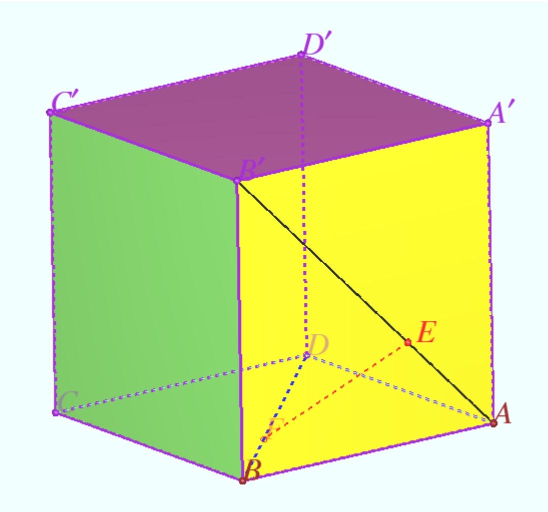

Рис. 5. Расстояние между скрещивающимися диагоналями граней куба

Задание 6

Расстояние между скрещивающимися диагоналями граней куба

Шаг 1. Задание. Найдите расстояние ***EF*** между диагональю AB' грани $AA'B'B$ куба $ABCDA'B'C'D'$ и диагональю BD грани $ABCD$. Точка ***E*** лежит на AB', точка ***F*** – на ***BD***, соответственно. ***AB = a.***

Шаг 2. Решение. Построен треугольник $AB'D'$ в котором каждая сторона – это одна из равных диагоналей граней куба. ***B'D'||BD***, значит, плоскость $AB'D'$ параллельна диагонали ***BD***.

Шаг 3. Построен треугольник ***BC'D'*** в котором каждая сторона – это одна из равных диагоналей граней куба. ***AB'||C'D***, значит, плоскость $AB'D'$ параллельна плоскости ***BC'D***.

Шаг 4. Построена диагональ куба ***A'C***. Она пересекает плоскость $AB'D'$ в точке ***Q***, плоскость ***BC'D*** в точке ***Q'***.

Шаг 5. При вращении куба вокруг диагонали ***A'C*** точка ***A*** последовательно переходит в точки ***B'*** и ***D'***, значит, плоскость $AB'D'$ (и параллельная ей плоскость ***BC'D***) перпендикулярны диагонали ***A'C***.

Шаг 6. Высоту $A'Q$ пирамиды $AB'D'A'$ находим, зная объём этой пирамиды $V=\frac{A'A\cdot A'D'\cdot A'D'}{6}=\frac{a^3}{6}$ и площадь правильного треугольника $A'B'D'$ со стороной $a\sqrt{2}$, лежащего в основании: $S=\frac{(A'A)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. $h=\frac{3V}{S}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{A'C}{3}$.

Шаг 7. Аналогично найдём $CQ'=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{A'C}{3}$. Расстояние между плоскостями $AB'D'$ и $BC'D$ равно $A'C-A'Q-CQ'=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Шаг 8. Расстояние между отрезком AB', лежащим в плоскости $AB'D'$, и отрезком BD, лежащим в плоскости $BC'D'$, не меньше, чем расстояние между плоскостями, то есть $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

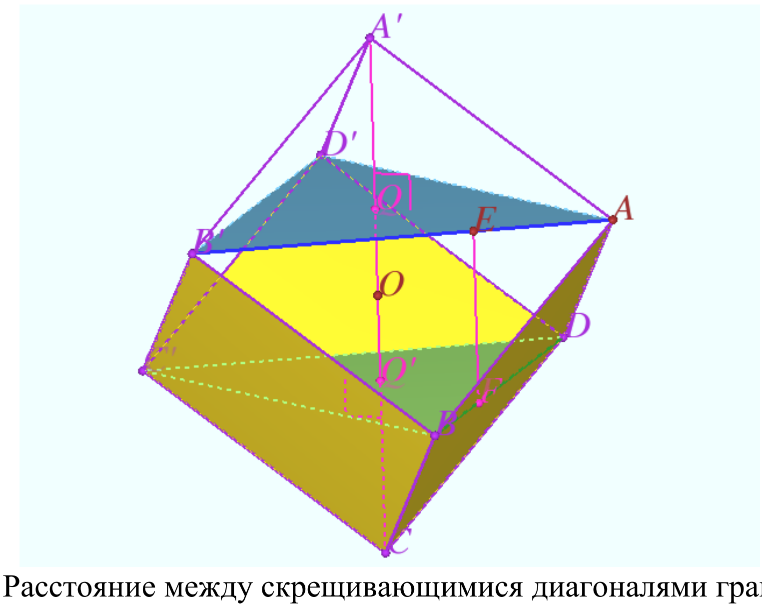

Рис. 6. Расстояние между скрещивающимися диагоналями граней куба

Задание 7

Расстояние между отрезками в единичном кубе

Шаг 1. Задание. Найдите расстояние между диагональю ***AB'*** грани ***AA'B'B*** единичного куба ***ABCDA'B'C'D'*** и отрезком ***CM*** (***M*** – середина ***BB'***) ***AA'B'B,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр делит диагональ и отрезок.

Шаг 2. Решение. Пусть ***EF*** – отрезок общего перпендикуляра (точка ***E*** на прямой ***CM***). Рассмотрим вид вдоль ***AB'***. ***A'B***$\perp$***AB'***, значит, в этом виде $A'B=\sqrt{2}$. Проекция отрезка ***BM*** это четверть ***A'B:*** $u=(BM)=\frac{A'B}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Запись ***(BM)*** означает длину проекции ***BM*** на плоскость, перпендикулярную направлению ***AB'***. ***BC***||***AB'***, значит, в этом виде ***BC*** $=1=$ ***v***. Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника ***BC(M)*** со сторонами ***u*** и ***v***: $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=8+1=9, h=\frac{1}{3}$.

Шаг 3. $(CM)^2=BC^2+(BM)^2=1+\frac{1}{8}, (CM)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. $(EM)^2=(MB')^2-EF^2=\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$, $(EM)=\frac{\sqrt{2}}{12}$. Отношение $\frac{CE}{EM}=\frac{(CM)+(EM)}{(EM)}=9+1=10$. Отношение $\frac{(BE)}{(OE)}=\frac{u^2}{v^2}=2; \frac{ED'}{BE}=\frac{2(BO)-BE}{BE}=3-1=2$.

Шаг 4. Отрезок ***EM*** найдём из пропорции $\frac{EM}{MC}=\frac{1}{9}, MC^2=1^2+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}, EM^2=\frac{5}{324}$. Отрезок ***FM*** найдём теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ***FME***: $FM^2=EM^2+FE^2=\frac{5}{324}+\frac{1}{9}=\frac{41}{324}$.

В треугольнике ***B'MF*** известны две стороны и угол $\angle MB'F=\angle AB'B=45°$. Пользуемся теоремой косинусов $B'F^2+B'M^2-2B'F\,B'M\cos 45°=FM^2$, обозначаем $x=B'F$ и получаем уравнение: $x^2+\frac{1}{4}-x\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{41}{324}$, $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{1}{648}$, находим его положительный корень: $B'F=\frac{2\sqrt{2}}{9}$. Знаем, что $AB'=\sqrt{2}$ и получаем $\frac{AF}{FB'}=\frac{7}{2}$.

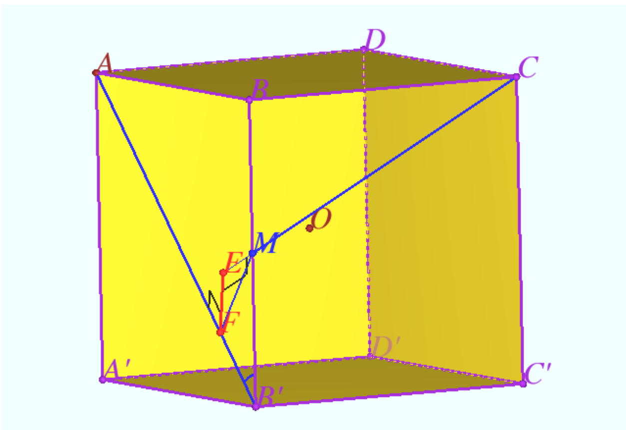

Рис. 7. Расстояние между отрезками в единичном кубе

Задание 8

Расстояние между диагоналями в правильной призме

Шаг 1. Задание. Дана правильная призма ***ABCA'B'C'***. Найдите расстояние между диагоналями боковых граней ***AB'*** и ***BC'***, если ***AB = AA' = a,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр делит диагональ и отрезок.

Шаг 2. Решение.

Задание 9

Расстояние между ребром и медианой грани правильного тетраэдра

Шаг 1. Задание. Найдите расстояние между ребром ***CD*** и медианой ***AF*** грани ***ABC*** правильного единичного тетраэдра ***ABCD,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр делит ребро и медиану.

Шаг 2. Решение. Пусть ***EH*** – отрезок общего перпендикуляра (***E*** на ребре ***CD***). Рассмотрим вид вдоль ***AF. BC⊥FA***, значит, в этом виде ***BC = 1. F*** – середина ***BC, u*** = (***CH***) = 0,5. Обозначение (***CH***) означает длину проекции ***CH*** на плоскость наблюдения. ***AD⊥BC***, причём длина (***HD***) равна высоте тетраэдра $v=\sqrt{\frac{2}{3}}$. . Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника со сторонами $v=\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $u=\frac{1}{2}$: $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=4+\frac{3}{2}, h=\sqrt{\frac{2}{11}}$.

Отношение $\frac{CE}{DE}=\frac{(CH)^2}{(DH)^2}=\frac{3}{8}$.

Шаг 3. Чтобы найти ***AH* : *FH,*** рассмотрим вид вдоль ***CD.*** Тетраэдр проектируется в равнобедренный треугольник с основанием ***AB*** = 1. Его боковые стороны равны медианам $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Его медиана $AF=\sqrt{\frac{AB^2+AD^2}{2}-BF^2}=\frac{\sqrt{11}}{4}$. $AH+FH=AF$. По теореме Пифагора:

$$AH^2-FH^2=AD^2-DF^2=\frac{9}{16},\quad AH-FH=\frac{9}{4\sqrt{11}}, AH:FH=10.$$

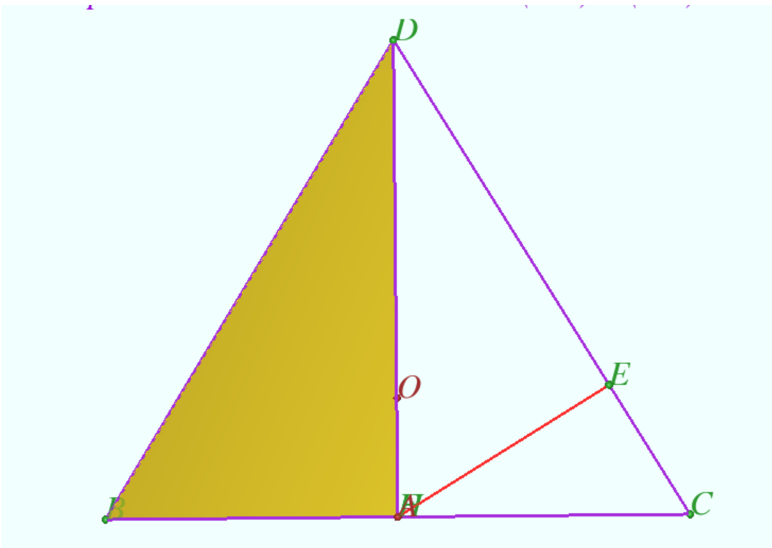

Рис. 9. Расстояние между ребром и медианой грани правильного тетраэдра

Задание 10

Расстояние между медианами граней правильного тетраэдра

Найдите расстояние между скрещивающимися медианами двух граней правильного единичного тетраэдра ***ABCD,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр к медианам делит их.

Шаг 1. Задание. Найдите расстояние между скрещивающимися медианами ***BE*** и ***DF*** граней ***ABD*** и ***ACD*** правильного единичного тетраэдра ***ABCD,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр к медианам делит их.

Шаг 2. Решение. Рассмотрим вид вдоль ***DF.*** ***AC***$\perp$***FG***, значит, в этом виде ***AC = 1. F*** – середина ***AC, E*** – середина ***AF***, ***u*** = (***EF***) = 0,25. Обозначение (***EF***) означает длину проекции ***EF*** на плоскость, перпендикулярную ***DF.*** ***AC***$\perp$***BF***, причём длина (***BF***) равна высоте тетраэдра $v=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника со сторонами $v=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и $u=\dfrac{1}{4}$: $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{v^2}=16+\dfrac{3}{2}, h=\sqrt{\dfrac{2}{35}}$.

Шаг 3. Отношение $\dfrac{BH}{EH}=\dfrac{(EF)^2}{(BF)^2}=\dfrac{32}{3}$.

Шаг 4. Чтобы найти ***DF*** : ***FG*** рассмотрим вид вдоль ***AD.*** Угол $\angle A$ наблюдаемого равнобедренного треугольника ***ABC*** равен двугранному углу тетраэдра, его косинус равен $\dfrac{1}{3}$.

$$(AH)=\frac{3}{35}AB, (AG)=\frac{(AH)}{\cos\alpha}=\frac{9}{35}.. \frac{DG}{DF}=\frac{(AG)}{(AF)}=\frac{(AG)}{(AC)/2}=\frac{18}{35}, DG:FG=18:17.$$

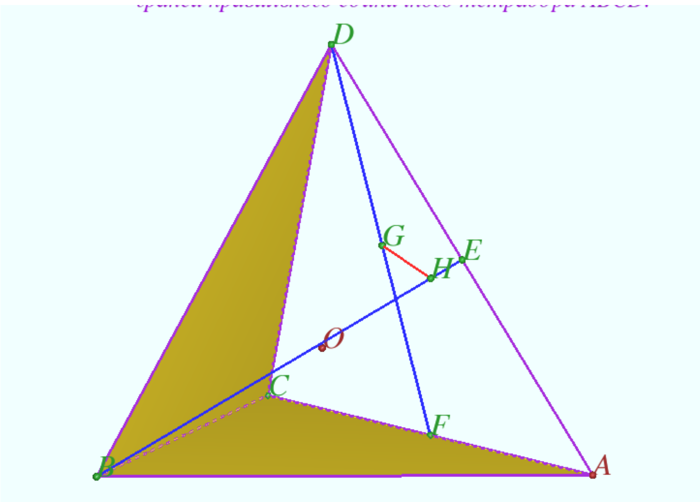

Рис. 10. Расстояние между медианами правильного тетраэдра

Решена ли задача?

Предложите ученикам закончить решение дома самостоятельно.

Задание 11

Расстояние между медианами граней правильного тетраэдра

Найдите расстояние между скрещивающимися медианами двух граней правильного единичного тетраэдра ***ABCD,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр к медианам делит их.

Анализируем найденное решение на предмет полноты: существуют ли иные решения? Желательно обсудить, зачем математикам нужны критерии единственности решений. ожно рекомендовать им почитать про помпаж воздухозаборника сверхзвуковых самолётов -явление в авиации, связанное с наличием двух решений для уравнений, описывающих движение газа, втекающего в двигатель самолёта. Устанавливаем, что в данном случае иное решение возможно. Методом перебора доказываем, что решений кроме двух рассмотренных нет.

Шаг 1. Задание. Найдите расстояние между скрещивающимися медианами между скрещивающимися медианами ***AF*** и ***BE*** граней ***ABC*** и ***ABD*** правильного единичного тетраэдра ***ABCD,*** и отношение, в котором общий перпендикуляр к медианам делит их.

Шаг 2. Решение. Рассмотрим вид вдоль ***AF***. ***AD⊥BC***, значит, в этом виде ***BC = 1,*** $u = (AB) = 0{,}5$. Длина (AD) равна высоте тетраэдра $\sqrt{\frac{2}{3}}$. ***E*** – середина ***AD,*** $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Искомое расстояние найдём, как высоту прямоугольного треугольника со сторонами ***u*** и ***v***:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = 4 + 6 = 10, h = \sqrt{\frac{1}{10}}.$$

Шаг 3. Отношение $\frac{BG}{EG} = \frac{(AB)^2}{(AE)^2} = \frac{3}{2}$.

Шаг 4. Чтобы найти ***DF*** : ***FG*** рассмотрим вид вдоль ***BE.*** Здесь также ***AH : FH = 3 : 2.*** Для завершения решения необходимо проверить, что расстояния между произвольно выбранной медианой ***BE*** и любыми другими медианами такие же как в двух рассмотренных случаях.

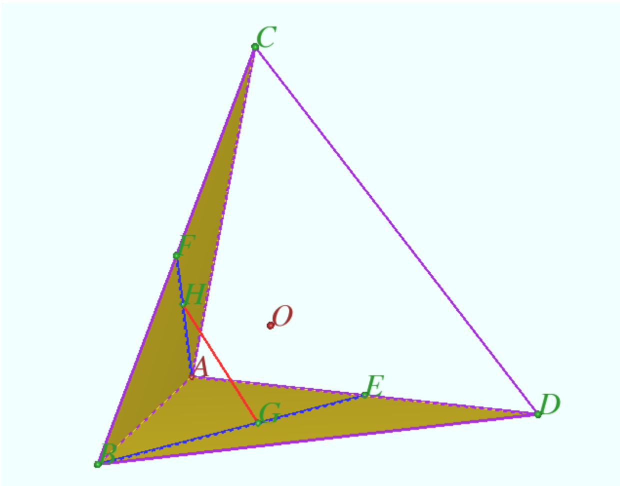

Рис. 11. Расстояние между медианами правильного тетраэдра (2)

Задание 12

Цилиндр, описанный вокруг правильного тетраэдра

Задание. Найдите расстояние между общим перпендикуляром к скрещивающимся медианам и вершинами тетраэдра.

Решение. ***AH⊥GH***, ***AH = 0,6AF =*** $AH = \frac{3}{5} AF = \frac{3\sqrt{3}}{10}$, значит, расстояния от ***A*** и ***B*** до общего перпендикуляра равны $\frac{3\sqrt{3}}{10}$.

Пусть ***C'C⊥GH***. Прямая ***GH*** расположена в плоскости, параллельной ***CD*** и ***AB***. ***GH = C'H = D'H***. Проекция ***C'C*** на эту плоскость ***(C'C) =*** $(C'C) = \frac{GH}{2} = \frac{1}{2\sqrt{10}}$.

Рассмотрим вид вдоль ***AB***. ***AG : GE = 3 : 2, AE = DE***. значит ***GE = 0,6AF.*** Косинус двугранного угла тетраэдра равен ***1/3,*** половины угла $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Проекция ***C'C*** на эту плоскость

$$(C'C) = 0{,}7AF\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}7\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{7}{10\sqrt{2}};\ CC'^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{7}{10\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{27}{100};\ CC' = \frac{3\sqrt{3}}{10}.$$

Таким образом правильный единичный тетраэдр может быть вписан в прямой круговой цилиндр с радиусом $\frac{3\sqrt{3}}{10}$ и длиной образующей $3GH = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

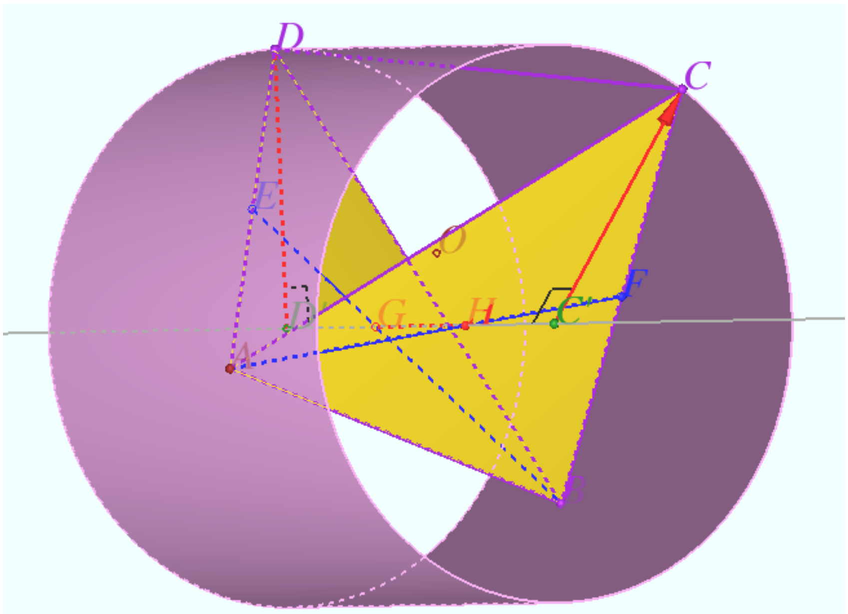

Рис. 12. Цилиндр, описанный вокруг правильного тетраэдра

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. 10 – 11 кл.: Учебник. –М.: Дрофа, 2007. – 206 с.

2. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. Стереометрия. 10 – 11 кл.: Пособие для учащихся. – М.: Дрофа, 1998. – 272 с.

3. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с.

4. Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. –М.: Изд. МЦНМО. 2006. – 256 с.

5. С.Ф. Шестаков. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. –М.: МЦНМО, 2005. – 112 с.