Подготовка к ЕГЭ 2014, стереометрия

Интерактивный комплект

2. Параллельность и перпендикулярность

2.3. Теорема о трех перпендикулярах

Пособие содержит описание основных понятий, методов расчёта, примеры объяснений как использовать интерактивный рисунок на уроке. Приводятся примеры доказательств понятия эквивалентности с подробным объяснением обоснования. На двух примерах показано, как применяется метод «от противного».

Оглавление раздела

Вход в интерактивные файлы выполняется с помощью щелчка по рисунку. Чтобы рисунки из комплекта ожили, установите на Вашем компьютере программу GInMA с сайта http://deoma-cmd.ru/Products/Geometry/GInMA.aspx **Бесплатная базовая версия** комплекта позволяет ознакомиться с возможностями пособия. Во всех файлах доступны первые шаги решений задач с условием и исходным интерактивным чертежом, в отдельных файлах доступны все шаги решения вплоть до ответа. Для полноценного использования комплекта рекомендуем его купить. **Покупка даст возможность видеть все шаги решения в интерактивном файле и сохранять созданные Вами варианты заданий.**

Задание 1

Эквивалентность равенства наклонных и их проекций

Докажите, что равенство наклонных эквивалентно равенству их проекций. Другими словами, из равенства наклонных следует равенство их проекций и из равенства проекций следует равенство наклонных.

Шаг 1. Задание. Докажите, что если равны наклонные из одной точки $AB = AC$, то проекции AB и AC на плоскость P, содержащую B и C, равны.

Шаг 2. Доказательство. Прямоугольные треугольники равны $\Delta AA'B = \Delta AA'C$ по катету и гипотенузе: $\angle AA'B = \angle AA'C = 90°$, $AB = AC$, AA' общий. Значит, равны катеты $A'B = A'C$.

Шаг 3. Задание. Докажите, что если равны проекции наклонных AB и AC на плоскость P, содержащую B и C, то $AB = AC$.

Шаг 4. Доказательство. Прямоугольные треугольники равны $\Delta AA'B = \Delta AA'C$ по двум катетам: $\angle AA'B = \angle AA'C = 90°$, $A'B = A'C$, AA' общий. Значит, равны гипотенузы $AB = AC$.

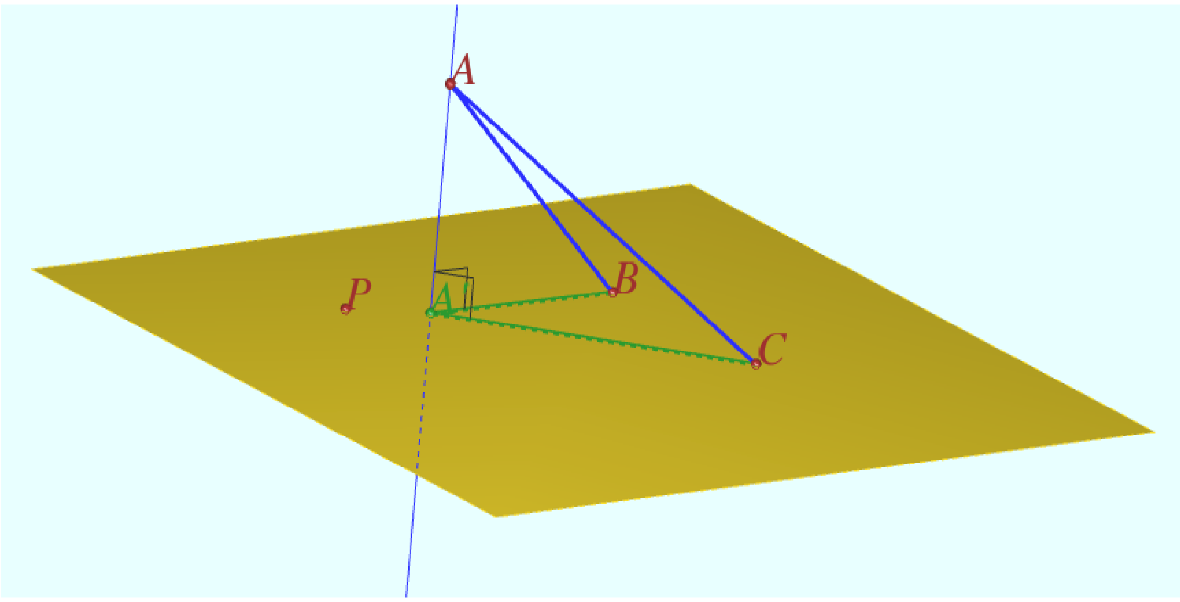

Рис. 1. Эквивалентность равенства наклонных и их проекций

Задание 2

Теорема о трех перпендикулярах

Шаг 1. Задание Докажите, что если прямая ***AB*** (точка ***A*** принадлежит плоскости ***P***) не перпендикулярна плоскости ***P***, но перпендикулярна прямой ***AC*** этой плоскости, то и проекция ***AB*** на плоскость ***P*** перпендикулярна ***AC***.

Шаг 2. Доказательство (метод симметрии).

Пусть точка ***C′*** симметрична ***C*** относительно точки ***A.*** По условию ***AB*** перпендикулярно ***CC′***, то есть ***AB*** – это высота и медиана (***CA = C′A***) треугольника ***BCC′,*** треугольник ***BCC′*** равнобедренный (***BC = BC′***), проекции равных наклонных равны, то есть ***B′C = B′C′***. В равнобедренном треугольнике ***B′CC′*** отрезок ***AB′*** является медианой, а, следовательно, и высотой, ***AB′⊥CC′***.

Шаг 3. Задание (Обратная теорема).

Докажите, что если проекция прямой ***AB*** (точка ***A*** принадлежит плоскости ***P***) на плоскость ***P*** перпендикулярна прямой ***AC*** этой плоскости, то и прямая ***AB*** перпендикулярна прямой ***AC***.

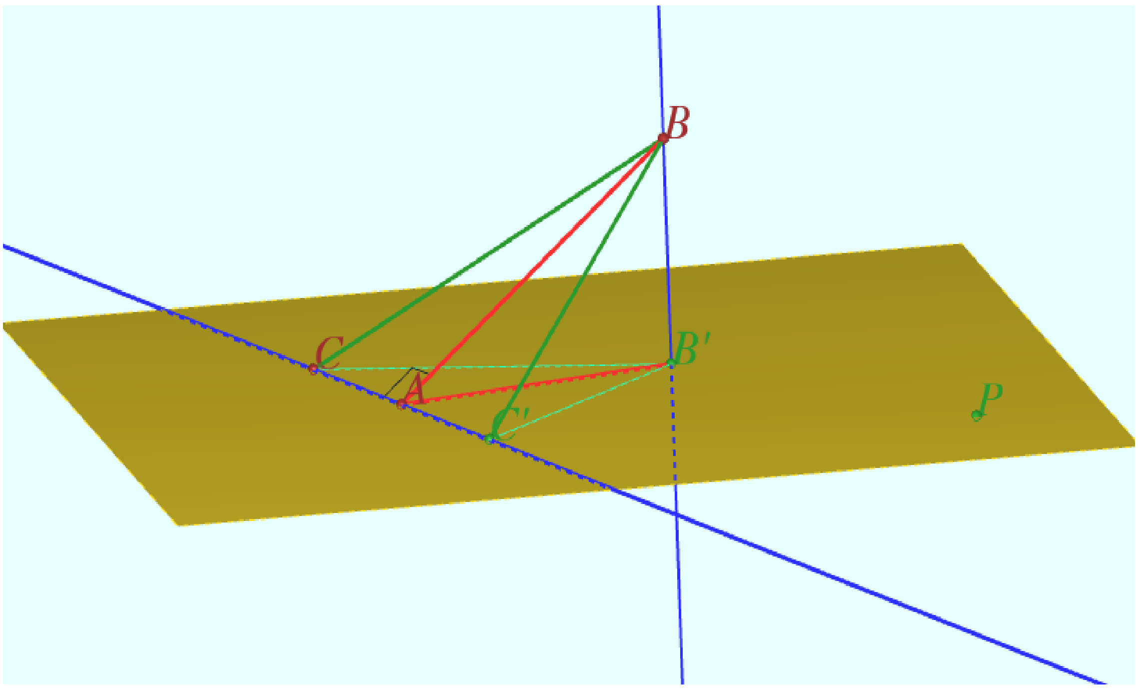

Рис. 2. Теорема о трех перпендикулярах

Задание 3

Общая точка равных наклонных проектируется в центр описанной окружности

Шаг 1. Задание Докажите, что если равны наклонные из точки ***A*** ***AB = AC = AD,*** то проекция ***A*** на плоскость ***BCD*** точка ***O*** – это центр описанной окружности треугольника ***BCD***.

Шаг 2. Доказательство. Пусть равны наклонные из точки ***A*** ***AB = AC = AD***. Из этого следует равенство проекций равных наклонных: ***BO = CO = DO***. Значит, точка ***O*** – это центр описанной окружности треугольника ***BCD***.

Шаг 3. Задание Докажите, что если точка ***A*** равноудалена от вершин плоского многоугольника (***BCDEF***), то этот многоугольник вписанный.

Решить самостоятельно, пользуясь интерактивными иллюстрациями.

Шаг 4. Задание В пирамиде ***ABCDEF*** ***AB=AC=AD=AE=AF= a***. Расстояние от ***A*** до плоскости ***BCD*** равно ***b***. Найдите радиус описанной окружности основания.

Решить самостоятельно, пользуясь интерактивными иллюстрациями.

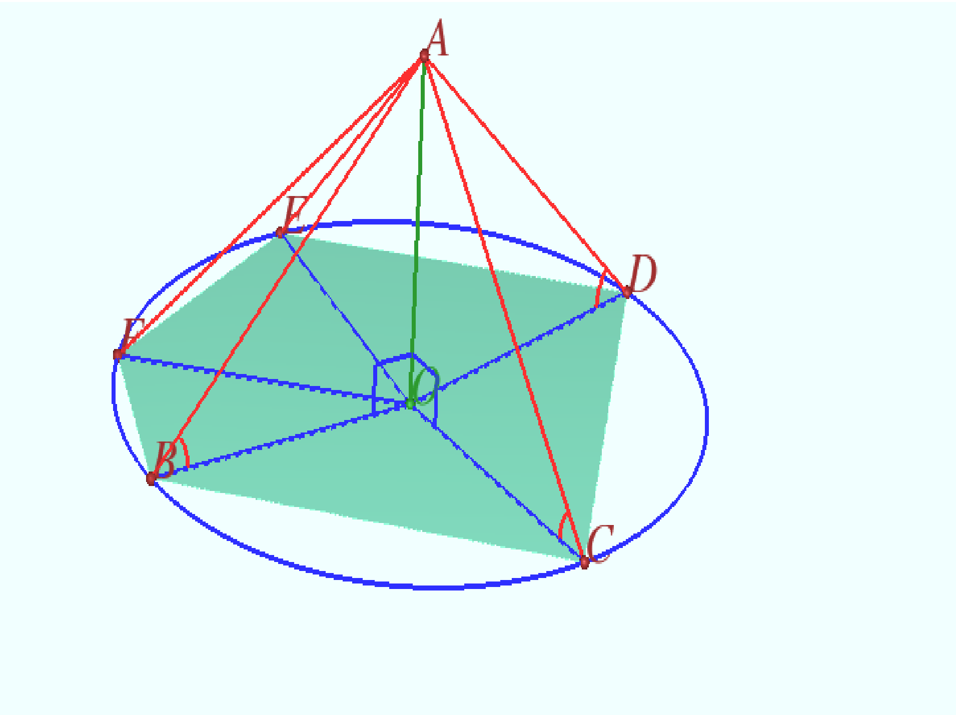

Рис. 3. Проекция общей точки равных наклонных

Задание 4

Проекция вершины в правильной пирамиде

Шаг 1. Задание Пусть ***ABCD*** – правильная пирамида с основанием ***ABC***. Найдите положение точки ***H*** – проекции ***D*** на основание ***ABC***.

Шаг 2. Решение. Из равенства наклонных $AD = BD = CD$ следует равенство проекций равных наклонных: $AH = BH = CH$, то есть точка ***H*** – это центр правильного многоугольника основания.

Шаг 3. Задание. Пусть ***ABCD…*** – правильная пирамида с основанием ***ABC…,*** содержащим три стороны (в общем случае, нечётное число сторон). Найдите угол между противолежащими рёбрами.

Шаг 4. Решение. В правильном нечётноугольнике ***ABC…*** центр описанной окружности ***H*** совпадает с точкой пересечения высот, ***AH*** – часть высоты, ***AH*** перпендикулярна противолежащей стороне. По теореме о трёх перпендикулярах ребро ***AP*** перпендикулярно противолежащему ребру (стороне нечётноугольника).

Шаг 5. Задание. Найдите высоту правильной пирамиды ***ABCD*** с основанием ***ABC***, если $AD = a,\ BC = b$.

Шаг 6. Решение. Центр описанной окружности основания совпадает с точкой пересечения медиан. Медианы в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1.

$$AH^2 = b^2/3 = AD^2 - DH^2$$

$$DH^2 = a^2 - b^2/3.$$

Шаг 7. Задание. Найдите высоту правильной ***n***–угольной пирамиды с боковым ребром ***a*** и стороной основания ***b*** (число ***n*** задаёт учитель).

Решить самостоятельно, пользуясь интерактивными иллюстрациями.

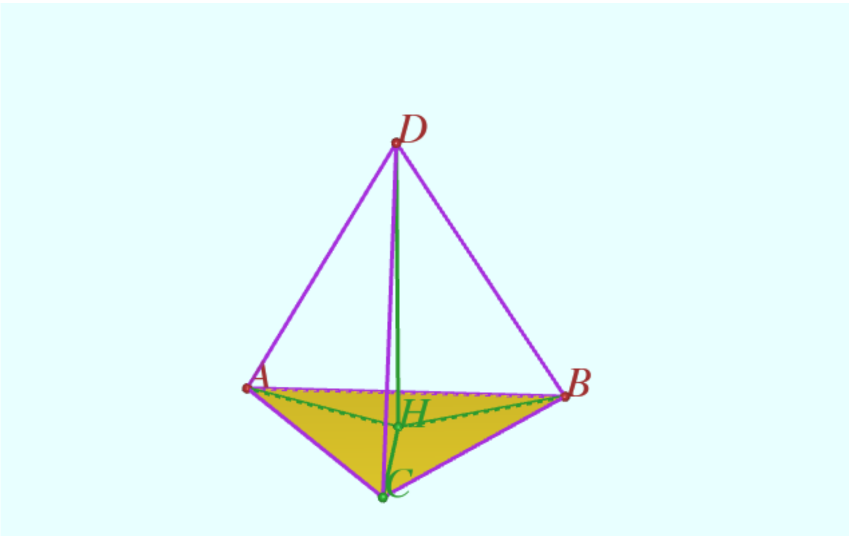

Рис. 4. Проекция вершины в правильной пирамиде

Задание 5

Геометрическое место точек, равноудалённых от двух прямых

Шаг 1. Задание Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых ***AB*** и ***AC***.

Шаг 2. Упрощённая задача. Рассмотрим плоский аналог задачи. Найти геометрическое место точек плоскости ***ABC***, равноудалённых от двух пересекающихся прямых ***AB*** и ***AC*** этой плоскости.

Шаг 3. Известно, что геометрическое место точек плоскости ***ABC***, равноудалённых от прямых ***AB*** и ***AC*** – это биссектрисы углов между прямыми.

Шаг 4. Размышление. Пусть ***D*** – точка пространства, равноудалённая от ***AB*** и ***AC***, ***E*** – её проекция на плоскость ***ABC***. Где могут располагаться точки ***E***?

Шаг 5. По теореме о проекциях, точка ***E*** равноудалена от ***AB*** и ***AC,*** то есть она расположена на биссектрисах углов между этими прямыми.

Шаг 6. По теореме об эквивалентности равенства наклонных и проекций, точка ***E*** равноудалена от ***AB*** и ***AC***, то есть она расположена на биссектрисах углов между прямыми. Значит, искомое ГМТ – это две плоскости, перпендикулярные ***ABC*** и содержащие биссектрисы углов между ***AB*** и ***AC***.

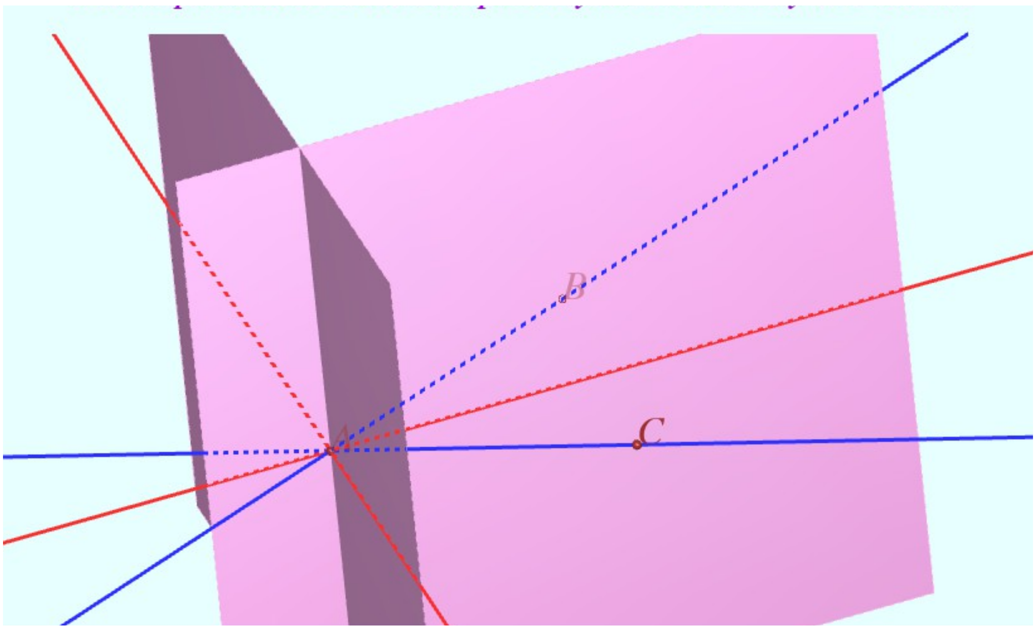

Рис. 5. Геометрическое место точек, равноудалённых от двух прямых

Задание 6

Геометрическое место точек, равноудалённых от трёх пересекающихся прямых

Шаг 1. Задание Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от трёх пересекающихся прямых ***AB, BC*** и ***AC***.

Шаг 2. Упрощённая задача. Рассмотрим плоский аналог задачи. В плоскости даны три пересекающиеся прямые ***AB, BC*** и ***AC***. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от этих прямых.

Шаг 3. Решение. Три пересекающиеся прямые лежат в плоскости, определяемой тройкой точек их пересечения ***A,B,C***. В этой плоскости искомое ГМТ – это центры вписанной и трёх вневписанных окружностей. Всего четыре точки ***I, Ia, Ib, Ic***.

Шаг 4. Пусть ***D*** – точка пространства, равноудалённая от ***AB, BC*** и ***AC***, а ***E*** – её проекция на плоскость ***ABC***.

Шаг 5. По свойству проекций наклонных, точка ***E*** равноудалена от ***AB, BC*** и ***AC***. Значит, она совпадает с одной из точек ***I, Ia, Ib, Ic***.

Шаг 6. Искомое ГМТ – это четыре прямые, перпендикулярные плоскости ***ABC*** и проходящие через точки ***I, Ia, Ib, Ic***.

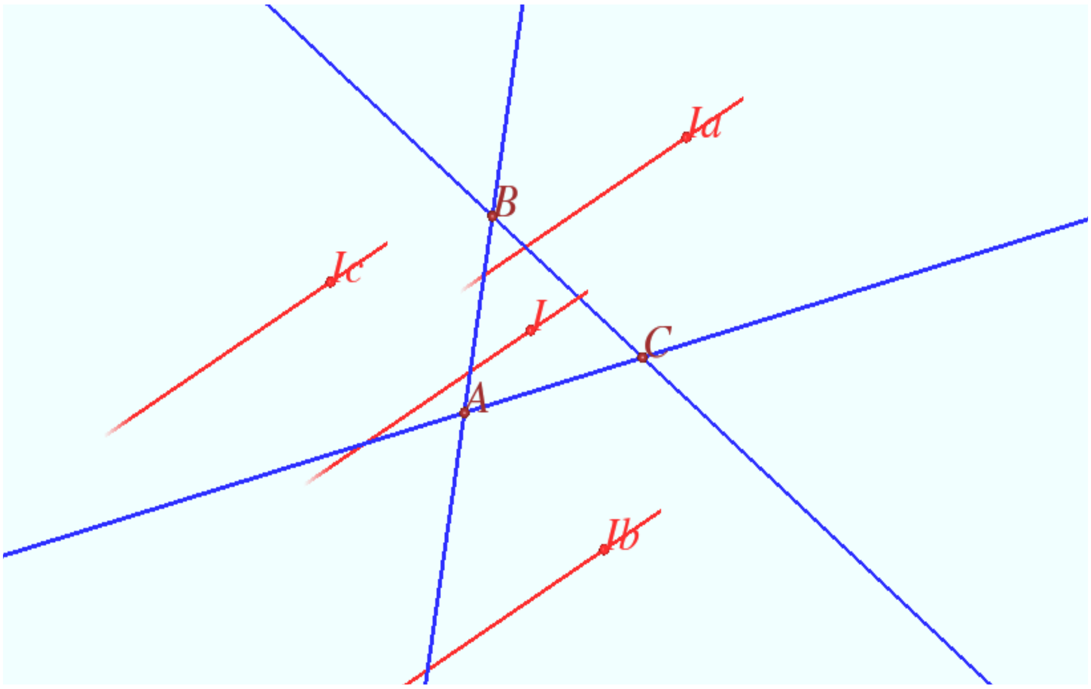

Рис. 6. Геометрическое место точек, равноудалённых от трёх пересекающихся прямых

Задание 7

Геометрическое место оснований перпендикуляров

Шаг 1. Задание. Найдите геометрическое место точек ***C***, являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из данной точки ***A*** на прямые, лежащие в данной плоскости и проходящие через заданную точку ***B***.

Шаг 2. Исследование. Выберите положение точек ***A*** и ***B***. Вращая прямую с помощью точки ***P***, исследуйте множество положений точки ***C***.

Шаг 3. Решение. Пусть ***A'*** – проекция ***A*** на заданную плоскость. $\angle ACB = 90°$, $\angle AA'C = 90°$. По теореме о трёх перпендикулярах $\angle A'CB = 90°$. Точки ***A'*** и ***B*** фиксированы.

Шаг 4. Геометрическое место точек из которых отрезок ***A'B*** виден под прямым углом, это окружность с диаметром ***A'B***. Значит, искомое множество – это окружность с диаметром ***A'B***.

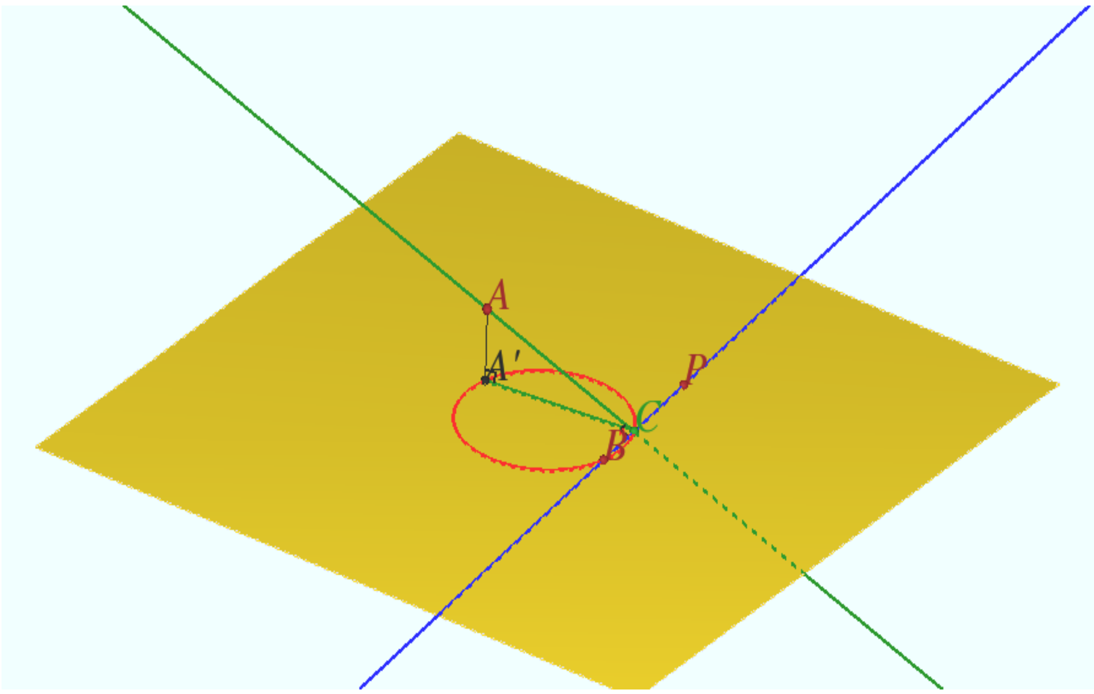

Рис. 7. Геометрическое место оснований перпендикуляров

Задание 8

Свойства ортоцентрического тетраэдра

Определение. Ортоцентрический тетраэдр – это тетраэдр, у которого все четыре высоты пересекаются в одной точке.

Для того, чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, ***необходимо и достаточно***, чтобы:

– основание одной из высот было ортоцентром треугольника основания;

– противоположные рёбра были перпендикулярны в каждой из трёх пар;

– отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, были равны;

– суммы квадратов длин двух пар противоположных рёбер были равны.

Свойства ортоцентрического тетраэдра

Если тетраэдр ортоцентрический, то:

– основание каждой из высот является ортоцентром соответствующей грани;

– противоположные рёбра перпендикулярны в каждой из трёх пар;

– основание каждой из высот является ортоцентром треугольника основания;

– противоположные рёбра попарно перпендикулярны;

– отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, равны между собой;

– суммы квадратов длин всех пар противоположных рёбер равны между собой;

– грани описанного параллелепипеда – ромбы;

– произведения косинусов противоположных двугранных углов равны между собой;

– центр тяжести расположен на середине отрезка, соединяющего центр описанной сферы и ортоцентр тетраэдра;

– центры тяжести и ортоцентры граней, а также точки, делящие отрезки каждой высоты тетраэдра от вершины до точки пересечения высот в отношении 2 : 1, лежат на одной сфере с центром на отрезке, соединяющем ортоцентр тетраэдра и центр описанной сферы, и делящей этот отрезок в отношении 2 : 1, считая от центра описанной сферы. Эта сфера имеет радиус втрое меньше, чем описанная сфера. Её называют сферой 12 точек.

– окружности Фейербаха каждой грани лежат на одной сфере с центром в центре тяжести тетраэдра. Эта сфера имеет радиус квадрат которого вчетверо меньше, чем сумма квадратов пары противоположных рёбер. Её называют сферой 24 точек.

Доказываем эти утверждения, используя возможности интерактивного GInMA файла.

Шаг 1. Задание Основанием высоты ***DH*** тетраэдра ***ABCD*** является ортоцентр треугольника ***ABC***. Докажите, что ***AB⊥CD, BC⊥AD, AC⊥BD***.

Шаг 2. Решение. Поскольку часть высоты ***AA′*** треугольника ***ABC*** отрезок ***AH*** – это проекция ***AD*** на ***ABC,*** то ***AH⊥BC,*** и по теореме о трёх перпендикулярах, ***AD⊥BC***. Аналогично ***AB⊥CD*** и ***AC⊥BD***.

Шаг 3. Задание. В тетраэдре ***ABCD AB⊥CD, BC⊥AD, AC⊥BD***. Докажите, что основанием высоты ***DH*** тетраэдра является ортоцентр треугольника ***ABC***.

Шаг 4. Решение. Часть высоты ***AA'*** треугольника ***ABC*** отрезок ***AH*** – это проекция ***AD*** на ***ABC*** и ***AD⊥BC***. По теореме о трёх перпендикулярах, ***AH⊥BC***. Аналогично ***AB⊥CD*** и ***AC⊥BD***. То есть ***H*** – точка пересечения перпендикуляров к сторонам, проходящих через вершины.

Шаг 5. Задание Основанием высоты ***DH*** тетраэдра ***ABCD*** является ортоцентр ***ABC***. Докажите, что основанием любой высоты является ортоцентр соответствующей грани.

Решить самостоятельно, пользуясь интерактивными иллюстрациями. (Доказательство – это последовательное использование выполненных выше доказательств).

Задание Докажите, что для того, чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, достаточно, чтобы противоположные рёбра были перпендикулярны в двух из трёх пар.

Решить самостоятельно, пользуясь интерактивными иллюстрациями.

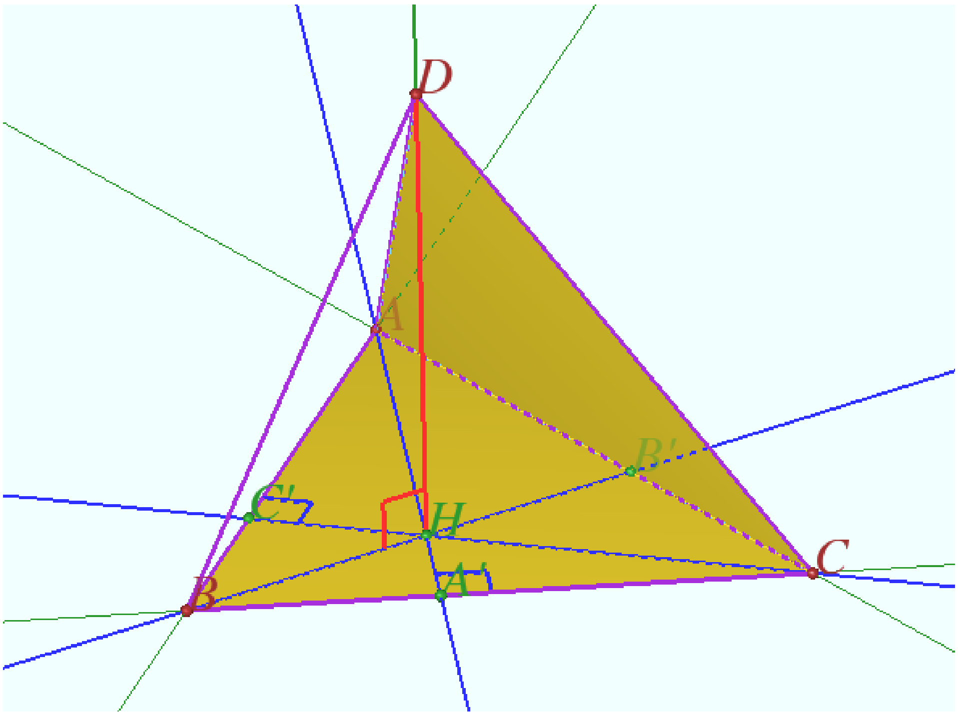

Рис. 8. Свойства ортоцентрического тетраэдра

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. 10 – 11 кл.: Учебник. –М.: Дрофа, 2007. – 206 с.

(1.5. *Теорема о трёх перпендикулярах*).

2. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с.

(4.3. *Теорема о трёх перпендикулярах*).