Подготовка к ЕГЭ 2014, стереометрия

Интерактивный комплект

2. Параллельность и перпендикулярность

2.2. Перпендикулярность прямой и плоскости

Пособие для содержит описание основных понятий, методов расчёта, примеры объяснений как использовать интерактивный рисунок на уроке. Приводятся примеры доказательств для геометрических мест точек с подробным объяснением метода поиска и обоснования. На двух примерах показано, как применяется метод «от противного».

Оглавление раздела

Вход в интерактивные файлы выполняется с помощью щелчка по рисунку. Чтобы рисунки из комплекта ожили, установите на Вашем компьютере программу GInMA с сайта http://deoma-cmd.ru/Products/Geometry/GInMA.aspx **Бесплатная базовая версия** комплекта позволяет ознакомиться с возможностями пособия. Во всех файлах доступны первые шаги решений задач с условием и исходным интерактивным чертежом, в отдельных файлах доступны все шаги решения вплоть до ответа. Для полноценного использования комплекта рекомендуем его купить. **Покупка даст возможность видеть все шаги решения в интерактивном файле и сохранять созданные Вами варианты заданий.**

Задание 1

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Пример урока с использованием интерактивности GInMA

Исследуйте признак перпендикулярности прямой и плоскости с использованием возможностей интерактивной геометрии.

Шаг 1. Определение.

На рисунке показаны плоскость ***ABC***, перпендикулярная ей прямая ***AE***, определяемая подвижной точкой ***A***, на этой прямой отмечена точка ***E***. Показана также прямая ***AB***, определяемая подвижной точкой ***B***. Разворачивая изображение и рассматривая в проекции, когда плоскость вырождается в прямую, убеждаемся, что прямая выглядит перпендикулярной плоскости. Вспоминаем определение:

Определение перпендикулярности.

Прямая называется перпендикулярной плоскости,

если она перпендикулярна каждой прямой этой плоскости.

На рисунке в плоскости проведена прямая ***AB***. Вращая эту прямую и разворачивая изображение в направлении перпендикулярном прямой так, чтобы плоскость вырождалась в прямую, убеждаемся, что прямая выглядит перпендикулярной любой прямой плоскости, проходящей через точку ***A***. Пользуясь инструментами «Цепляемая точка» и «Прямая» вкладки «Базовое построение» можно построить любую другую прямую плоскости, развернуть ***AB*** параллельно ей и обосновать перпендикулярность любой прямой плоскости. Поясняем, что данное определение пока не является обоснованным. Действительно, не понятно, существует ли вообще такая прямая. Кроме того, определение не может быть использовано на практике, так как надо проверять перпендикулярность исследуемой прямой и каждой прямой плоскости. Таким образом обосновываем необходимость поиска признака перпендикулярности.

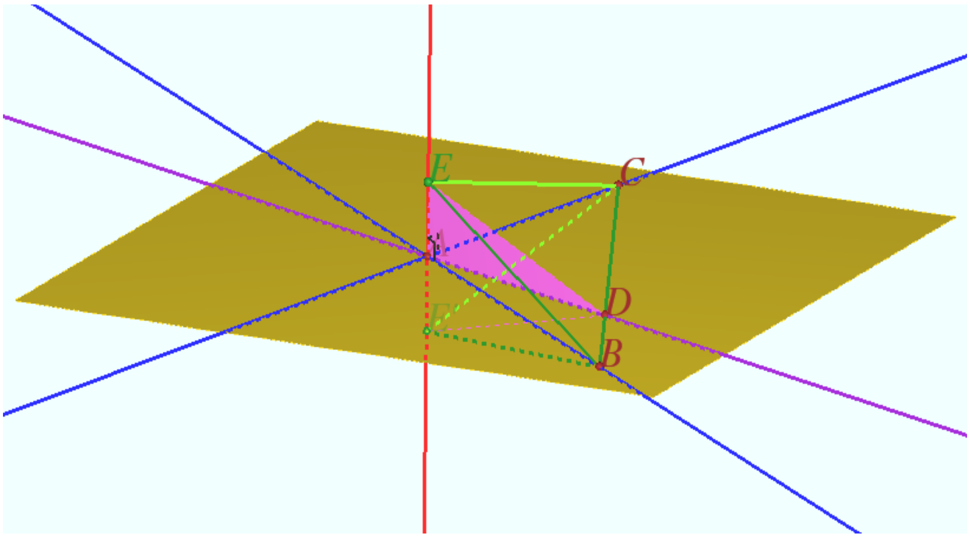

Рис. 1. Определение и признак перпендикулярности прямой и плоскости

Шаг 2. Признак.

Признак перпендикулярности.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум непараллельным прямым этой плоскости.

На рисунке в плоскости проведены две подвижные прямые ***AB*** и ***AC***. Если признак верен, он обосновывает определение, так как прямую, перпендикулярную двум данным, можно построить. Такая прямая находится на пересечении плоскостей, перпендикулярных данным прямым. Признак удобен для использования, так как он позволит доказывать перпендикулярность. Доказательство перпендикулярности сводится к проверке перпендикулярности исследуемой прямой и двух произвольно выбранных не параллельных прямых, лежащих в плоскости.

Возникают вопросы (лучше спровоцировать их, чтобы кто-то из думающих учеников задал их в произвольной форме) как доказать признак, и что для этого требуется? Обсуждение проблемы завешается переходом на следующий шаг.

Шаг 3. Математическая формулировка доказательства для признака.

На рисунке проведен отрезок ***BC***, на котором размещена подвижная точка ***D***. Проведена прямая ***AD***. Важно, что если доказать, что $AD \perp AE$, то будет доказано, что прямая ***AE*** перпендикулярна любой прямой плоскости. Действительно, для любой прямой плоскости можно провести параллельную ей, проходящую через точку ***A***. Эта прямая либо совпадёт с ***AB*** или ***AC,*** либо пересечет отрезок ***BC***, либо пересечёт отрезок ***B'C*** в точке ***D'***, где точка ***B'*** симметрична ***B*** относительно ***A***. В последнем случае доказательство строится так же, как в рассматриваемом.

Итак, достаточно доказать следующее.

Пусть прямая ***AE*** перпендикулярна ровно двум прямым проходящим через точку ***A***, то есть $AB \perp AE$ и $AC \perp AE$, и точка ***D*** расположена на ***BC*** ($D \in BC$).

Тогда $AD \perp AE$. Из этого доказательства последует, что ***AE*** перпендикулярна ***любой*** прямой плоскости.

Шаг 4. Доказательство признака.

Выполним дополнительное построение. Построим точку ***E′***, которая центрально симметрична точке ***E*** относительно точки ***A***. Проведём равные (симметричные) пары отрезков $BE = BE'$ и $CE = CE'$. Отсюда следует, что $\Delta BCE = \Delta BCE'$ (равенство по трём сторонам). Строим симметричные (равные) отрезки ***DE*** и ***DE′***. Значит, ***AD*** – это медиана равнобедренного треугольника ***DEE′***. Следовательно, ***AD*** – это высота равнобедренного треугольника ***DEE′***. То есть $AD \perp AE$.

Задание 2

Плоскости и прямые, перпендикулярные одной прямой

Шаг 1. Задание Пусть каждая из прямых ***AB*** и ***CD*** перпендикулярна прямой ***AC***. Верно ли, что прямые ***AB*** и ***CD*** параллельны?

Решение. Разворачивая изображение и рассматривая его в проекции, когда ***AC*** вырождается в точку, убеждаемся, что утверждение не верно. Объясняем, что для опровержения утверждения в математике достаточно привести ровно один контрпример. Например, рассмотрите случай, когда ***CD⊥AB***.

Шаг 2. Задание Пусть плоскости ***AB*** и ***CD*** перпендикулярны прямой ***AC***. Верно ли, что плоскости ***AB*** и ***CD*** параллельны?

Исследование. Разворачивая изображение и рассматривая проекции, высказываем предположение, что утверждение верно. Значит, его необходимо доказать!

Шаг 3. Доказательство. Пусть ***AB*** – прямая, лежащая в плоскости, обозначенной ***AB***. Обозначим ***CE*** – прямую, возникающую при пересечении плоскостей ***ABC*** и ***CD***. Любая прямая в плоскости ***AB*** перпендикулярна ***AC***, то есть ***AB⊥AC***. Любая прямая в плоскости ***CD*** перпендикулярна ***AC***, то есть ***CE⊥AC.*** Прямые ***AB*** и ***CE*** лежат в одной плоскости и перпендикулярны ***AC***, то есть ***CE||AC.*** Переместив прямую ***AB***, построим новую прямую в плоскости ***AB*** и новую параллельную ей прямую в плоскости ***CD***. По признаку параллельности двух плоскостей, плоскости ***AB*** и ***CD*** параллельны.

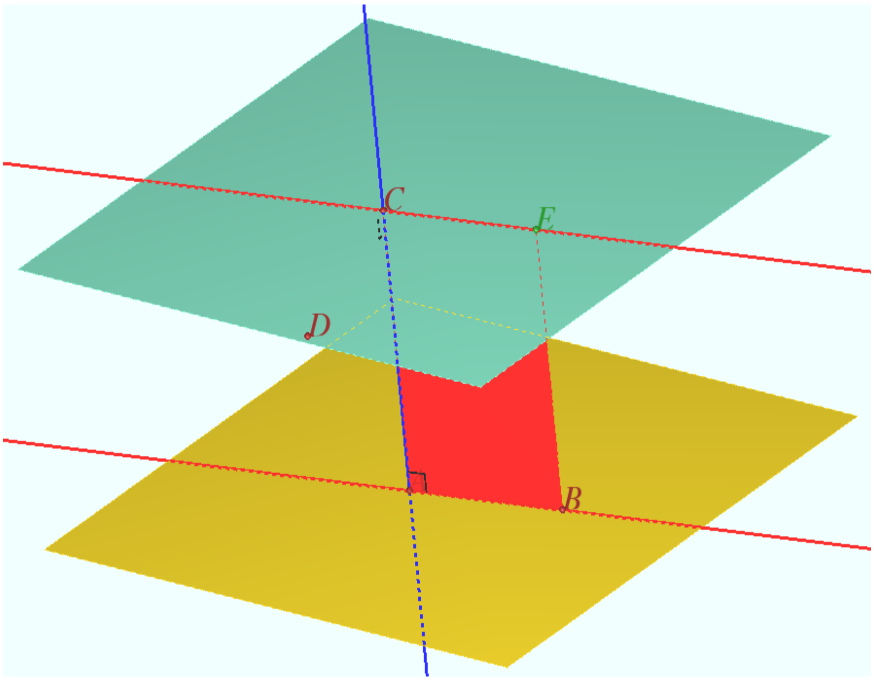

Рис. 2. Плоскости, перпендикулярные одной прямой

Задание 3

Единственность перпендикуляра к плоскости

Шаг 1. Задание Докажите, что через данную точку ***A*** проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости ***P***.

Исследование. Разворачивая изображение и рассматривая его, высказываем предположение, что утверждение похоже на истину. Его надо доказывать. Как?

Шаг 2. Доказательство, формулируем противное. Применим метод «от противного». Допустим обратное, то есть допустим, что через ***A*** проходят, по крайней мере, две разные прямые ***AB*** и ***AA′***, перпендикулярные ***P***.

Шаг 2. Доказательство, находим противоречие. Найдём противоречие, которое и докажет утверждение. Вспомним важное положение стереометрии о том, что в любой плоскости выполняются утверждения планиметрии. Будем искать противоречие в некоторой плоскости. На рисунке построена плоскость, содержащая оба перпендикуляра. Противоречие возникает именно в этой плоскости. ***В плоскости AA'B из точки A на прямую A'B опущены два перпендикуляра. Это невозможно. Противоречие. Значит, исходное утверждение верно.***

Полезно выяснить – все ли случаи расположения точки ***A*** рассмотрены. Особый случай – точка ***A*** лежит в плоскости ***P***. Его нужно исследовать отдельно. Выполнив это, получаем общую теорему.

Шаг 4. Теорема о единственности перпендикуляра

Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

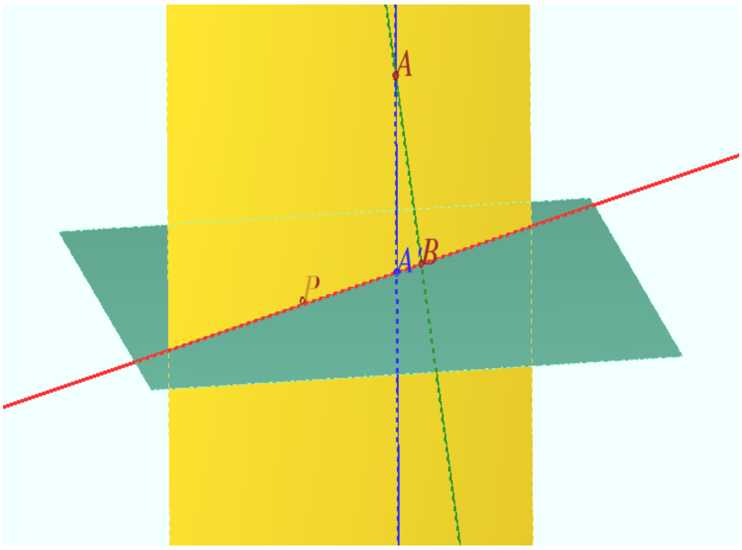

Рис. 3. Единственность перпендикуляра

Задание 4
Плоскость, перпендикулярная диагонали куба

Шаг 1. Задание предварительное. Докажите, что в кубе ***ABCDA'B'C'D'*** диагональ куба ***AC'*** перпендикулярна диагонали грани ***BD***.

Шаг 2. Решение. Проекция ***AC'*** на грань ***ABCD* — ** это диагональ грани ***AC.*** Поскольку грань это квадрат, то ***AC*** перпендикулярна второй диагонали этой грани ***BD***.

Шаг 3. Задание основное. Докажите, что в кубе ***ABCDA'B'C'D'*** диагональ куба ***AC'*** перпендикулярна плоскости ***A'BD***.

Шаг 4. Решение. Проекции диагонали ***AC'*** перпендикулярны диагоналям граней ***BD*** и ***A'B***. По свойству проекций, сама диагональ ***AC'*** перпендикулярна этим двум прямым плоскости ***A'BD***. По признаку перпендикулярности, прямая ***AC'*** перпендикулярна плоскости ***A'BD***.

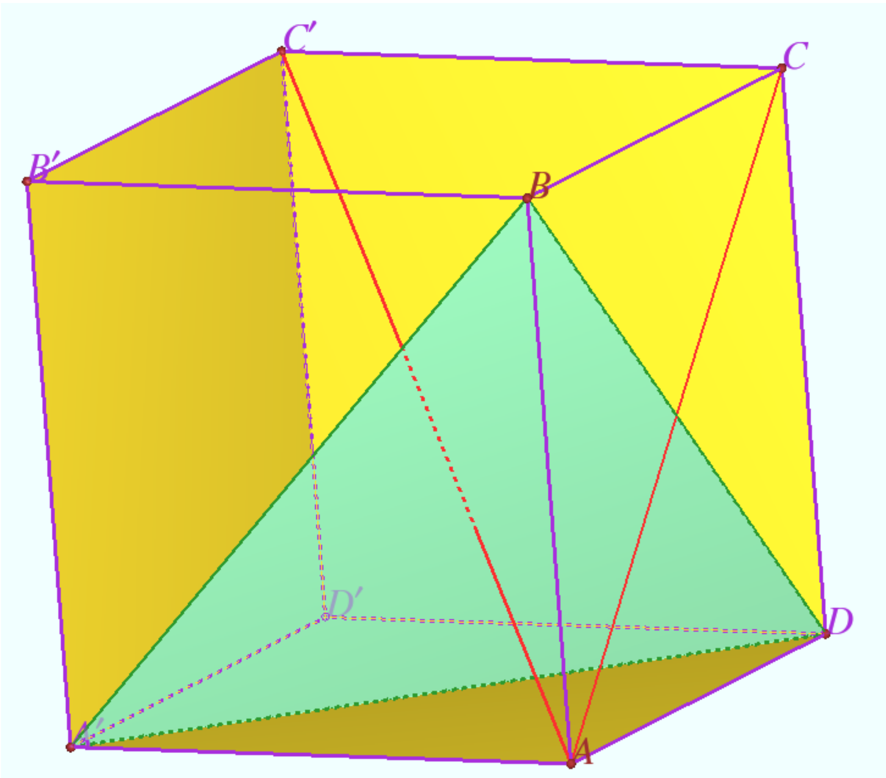

Рис. 4. Плоскость, перпендикулярная диагонали куба

Задание 5

Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных

Шаг 1. Задание.

Докажите, что геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек ***A*** и ***B*** - это плоскость, проходящая через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB***.

Как известно, геометрическое место точек – это совокупность ***всех*** точек, обладающих некоторым свойством. Значит, в ходе решения требуется:

– найти любым способом (можно поверить условию), где могут находиться точки, обладающие оговоренным свойством. Далее нужно обосновать два факта:

– доказать, что каждая точка найденного множества обладает оговоренным свойством;

– доказать, что никакая другая точка этим свойством не обладает.

Шаг 2. Доказываем, *что каждая точка найденного множества обладает оговоренным свойством.*

Пусть точка ***C*** принадлежит плоскости, проходящей через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB***, ***D*** – середина ***AB***. Тогда ***CD*** перпендикулярно ***AB, AD = BD*** и ***AC = BC.*** Этим доказано, что каждая точка ***C*** плоскости проходящей через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB*** принадлежит искомому множеству.

Шаг 3. Доказываем, *что никакая другая точка этим свойством не обладает.*

Пусть ***AC = BC***. Либо точка ***C*** совпадает с ***D***, либо треугольник ***ABC*** – равнобедренный. ***CD*** – его медиана, значит, ***CD*** – его высота. Как высота, ***CD⊥AB***. Значит, точка ***C*** обязательно принадлежит плоскости проходящей через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB***. Этим доказано, что никакая другая точка этим свойством не обладает.

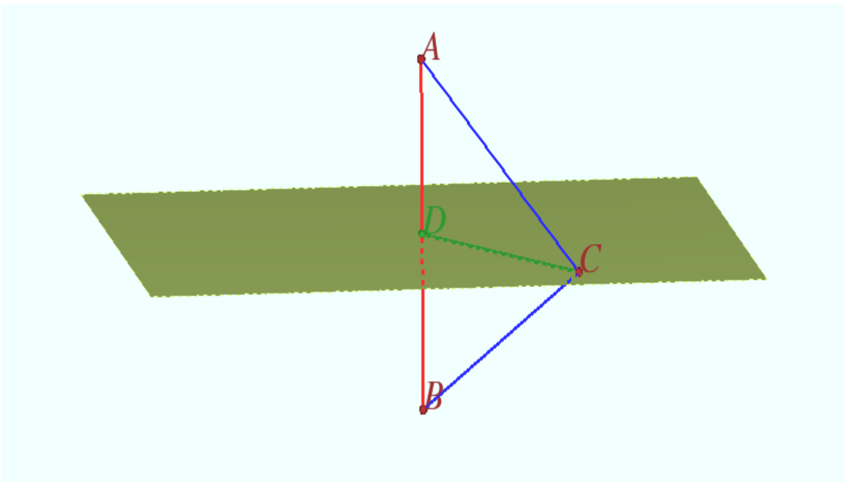

Рис. 5. Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных

Задание 6

Множество точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек – постоянная величина

Шаг 1. Задание.

Найдите геометрическое место точек C пространства таких, что разность квадратов расстояний до двух заданных точек есть постоянная величина.

Обсуждение условия. На рисунке показан треугольник ABC. На прямой AB находится точка D. Требуется найти геометрическое место точек C пространства таких, что разность квадратов расстояний до двух заданных точек A и B есть постоянная величина. Эта величина определяется точкой D: $AC^2 – BC^2 = AD^2 – BD^2 = d$.

Конкретизация условия. Найдите геометрическое место точек C таких, что: $AC^2 – BC^2 = d$, где d задаёт точка D лежащая на луче AB, $d = AD^2 – BD^2$.

Шаг 2. Исследование.

Начните исследование для самых простых случаев. Во–первых, в плоскости, а не в пространстве, а во–вторых, для удобных положений точки D. В этих случаях искомое множество точек – это прямая, перпендикулярная AB и проходящая через D. Рассмотрите случаи, когда D – середина AB, $D = A$ или $D = B$.

Шаг 3. Продолжаем исследование. Выходим в пространство и двигаем точку P, чтобы вращать плоскость ABC. На рисунке показан вектор, лежащий в плоскости ABP и перпендикулярный AB. Указано отношение $k=\dfrac{AC^2-BC^2}{AD^2-BD^2}$. Полезно вспомнить теорему Пифагора и обсудить целесообразность её использования. Желательно провести рассмотрение как в простом случае, когда AB и нормальный вектор очевидно перпендикулярны, так и в случае, когда перпендикуляр выглядит наклонной. Рассмотрите произвольные положения точки C.

Шаг 4. Доказываем, что каждая точка найденного множества обладает оговоренным свойством.

Допустим, что $CD\perp AB$. Тогда по теореме Пифагора находим, что $AC^2 – AD^2 = CD^2$ и $BC^2 – BD^2 = CD^2$, то есть $AC^2 – BC^2 = AD^2 – BD^2$. Значит, все точки плоскости ABP, лежащие на перпендикуляре CD, удовлетворяют условию.

Переходим в пространство. Полезно рассмотреть вид, близкий к направлению AB и, пользуясь точкой P, вращать плоскость ABP. Точки прямых перейдут в точки плоскости, перпендикулярной AB и проходящей через D. Значит, все точки плоскости перпендикулярной AB и проходящей через D, удовлетворяют условию.

Формулируем доказательство «под запись». Пусть $CD\perp AB$. Тогда $AC^2 – AD^2 = CD^2$, $BC^2 – BD^2 = CD^2$. Значит, любая точка перпендикуляра CD удовлетворяет условию. Значит, все точки плоскости перпендикулярной AB и проходящей через D, удовлетворяют условию.

Шаг 5. Объединение всех перпендикуляров ***CD*** – это плоскость, перпендикулярная ***AB*** и проходящая через ***D***.

Шаг 6. Доказываем, ***что никакая другая точка этим свойством не обладает.***

Пусть ***CD –*** не перпендикулярна ***AB***. Точка ***C*** вне найденной плоскости. Её проекция на ***AB*** точка ***M*** не совпадает с ***D***, что следует из единственности перпендикуляра, опущенного в плоскости из заданной точки на заданную прямую. В этом случае

$$AC^2 - BC^2 = AM^2 - BM^2 \neq AD^2 - BD^2.$$

Итак, обосновано, что все точки плоскости, перпендикулярной ***AB*** и проходящей через ***D*** свойством $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ обладают и никакие другие точки этим свойством не обладают.

Шаг 7. Результат доказательства.

Установлено, что ***ГМТ пространства*** $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$, ***A и B заданные точки,*** $D \in AB$, ***есть плоскость, перпендикулярная AB и проходящая через D.***

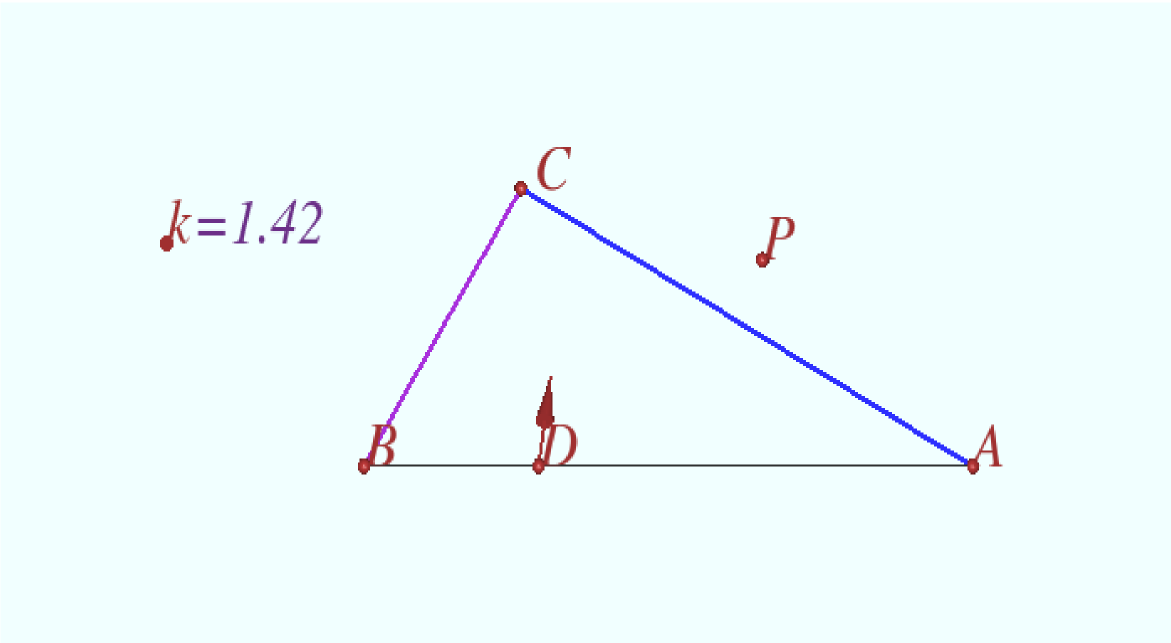

Рис. 6. ГМ точек таких, что разность квадратов расстояний постоянна.

Задание 7

Тетраэдр с перпендикулярными рёбрами

Шаг 1. Задание. На рисунке тетраэдр ***ABCD***, у которого равны две пары рёбер ***AC = BC, AD = BD*** (или ***A, B, C*** и ***D*** точки в пространстве, причём ***AC = BC, AD = BD***). Докажите, что ***AB*** перпендикулярно ***CD***.

В ходе обсуждения желательно заметить пару равнобедренных треугольников и вспомнить свойство высоты–медианы в этих треугольниках.

Шаг 2. Решение. Пусть точка ***M*** – это середина ребра ***AB***. В плоскости ***ABC*** устанавливаем, что ***CM⊥AB***, так как в треугольнике ***ABC*** медиана ***CM*** является также высотой.

Аналогично, в плоскости ***ABD*** устанавливаем, что ***DM⊥AB.*** Значит, плоскость ***CMD*** содержит две прямые, перпендикулярные ***AB*** и по признаку перпендикулярности она перпендикулярна ***AB.*** Прямая ***CD*** принадлежит плоскости ***CDM***. Как любая прямая плоскости ***CDM*** прямая ***CD,*** перпендикулярна ***AB***.

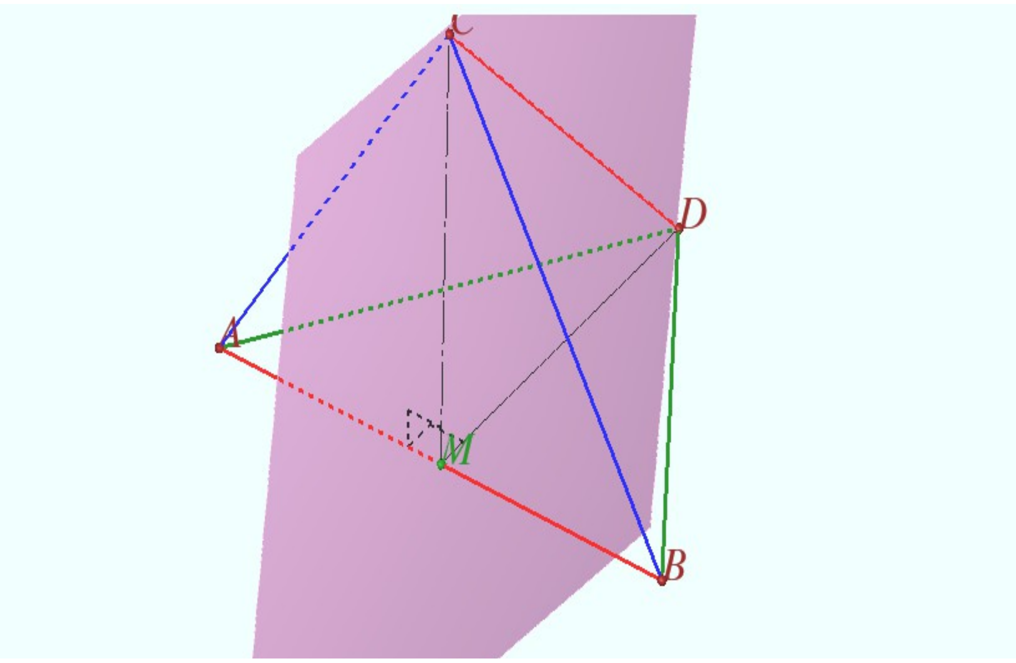

Рис. 7. Тетраэдр с перпендикулярными рёбрами

Задание 8

Перпендикуляр, как расстояние между точкой плоскостью

Общее определение. Расстоянием между телами A и B называют наименьшее расстояние между точками тела A и точками тела B.

Конкретное определение. Расстояние между точкой A и фигурой P – это наименьшее расстояние между точкой A и точками фигуры P.

Частное определение. Расстояние между точкой A и плоскостью P – это наименьшее расстояние между точкой A и точками плоскости P.

Исследование. На уроке стоит обсудить понятие расстояния между фигурами или телами – например, как определить расстояние между соседними партами, почему расстоянием принято считать наименьшее расстояние между точками, принадлежащими фигурам, телам.

Шаг 1. На интерактивном рисунке даны точка A, плоскость P и точка B, принадлежащая плоскости P. Записано значение расстояния AB. Перемещая точку B, стремимся к тому, чтобы найти наименьшее расстояние. Обсуждаем, как найти ту точку плоскости, которая ближе всего к точке A, и, соответственно, расстояние до плоскости.

Шаг 2. Показан перпендикуляр AA' опущенный из точки A на плоскость P. Основание перпендикуляра точку A' называют проекцией (нормальной) точки A на плоскость P. Указано отношение $\frac{AB}{AA'}$. Это отношение не меньше, чем единица. Перемещая точку B, стремимся к тому, чтобы получить единицу.

Высказываем предположение: ***Расстояние от точки до плоскости равно длине отрезка, соединяющего точку и её проекцию на плоскость.***

Проверяем предположение, перемещая точку B в положение A' и меняя положение точки A. Обсуждаем вопрос – что надо доказать, чтобы утверждение оказалось верным? Приходим к выводу, что надо доказать неравенство $AA' \le AB$.

Задание Докажите, что расстояние от точки до плоскости равно длине отрезка, соединяющего точку и её проекцию на плоскость.

Шаг 3. Доказательство. Пусть точка A' – это проекция точки A на плоскость P. Угол $\angle AA'B$ прямой. Значит, AA' это катет, а AB – гипотенуза прямоугольного треугольника $AA'B$. Ясно, что катет не больше, чем гипотенуза $AA' \le AB$.

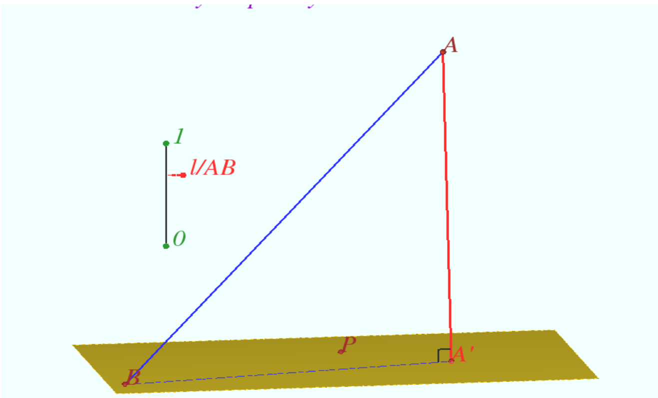

Рис. 8. Перпендикуляр, как расстояние между точкой плоскостью

Задание 9

Теорема о двух перпендикулярах

Шаг 1. Исследование. На рисунке показаны прямые ***AA'*** и ***CC'***, перпендикулярные плоскости ***P***. Рассматривая конфигурацию с разных направлений, высказываем предположение о параллельности прямых.

Две различные прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

Обсуждаем, что и как нужно доказывать, чтобы обосновать утверждение. Желательно напомнить учащимся, что через данную точку к данной плоскости можно провести единственный перпендикуляр. Вспоминаем идею доказательства от противного.

Шаг 2. Задание. Докажите, что две различные прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

Шаг 3. Доказательство. Предположим противное. Пусть прямые ***AA'*** и ***BB'*** перпендикулярны плоскости ***P***, прямая ***BC||AA'*** и эта ***прямая BC не совпадает с BB'***. Пусть произвольная прямая ***L*** принадлежит плоскости ***P***. Тогда ***AA'⊥L*** и ***BB'⊥L***, как к любой прямой плоскости ***P***. Из условия ***BC||AA'*** следует, что ***BC⊥L***. Поскольку ***L*** – произвольная прямая плоскости ***P***, то ***BC⊥P***. Но перпендикуляр из ***B*** к плоскости ***P*** единственный, значит, ***CC' совпадает с CD***. Найдено противоречие.

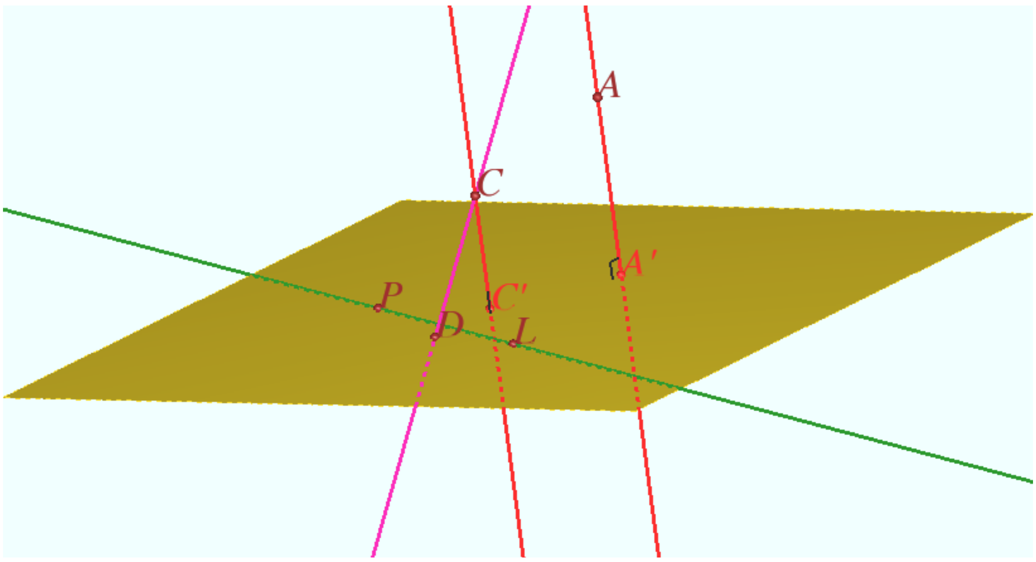

Рис. 9. Теорема о двух перпендикулярах

Задание 10

Теорема Пифагора для пирамиды с перпендикулярными рёбрами

Шаг 1. Задание. В пирамиде ***ABCD*** $AD^2 = AB^2 + BD^2$, $CD^2 = BC^2 + BD^2$. Докажите, что ребро ***BD*** перпендикулярно плоскости ***ABC***.

Шаг 2. Решение. Треугольник ***ABD*** прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора, поскольку $AD^2 = AB^2 + BD^2$. Значит, $BD \perp AB$. Аналогично, $CD^2 = BC^2 + BD^2$, значит, $BD \perp BC$.

По признаку перпендикулярности, ребро ***BD*** перпендикулярное двум прямым плоскости ***ABC*** перпендикулярно плоскости ***ABC***.

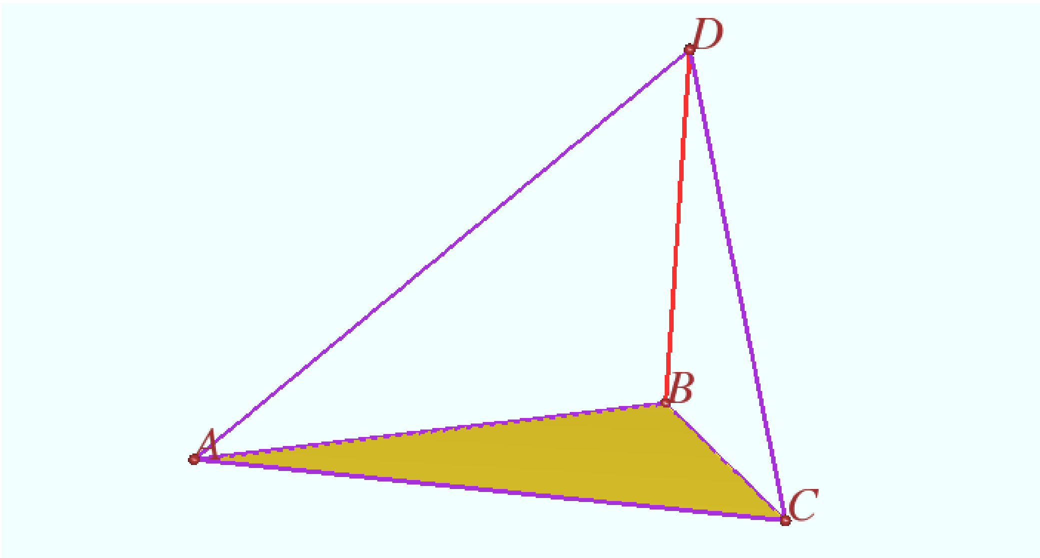

Рис. 10. Теорема Пифагора для пирамиды

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. 10 – 11 кл.: Учебник. –М.: Дрофа, 2007. – 206 с.

2. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с.

3. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 11. –М.: Физматкнига, 2005. – 336 с.

4. Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. –М.: Изд. МЦНМО. 2006. – 256 с.

5. В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. –М.: «НАУКА», 1989, Библиотека математического кружка, вып. 19. – 287 с.