Подготовка к ЕГЭ 2014, стереометрия

Интерактивный комплект

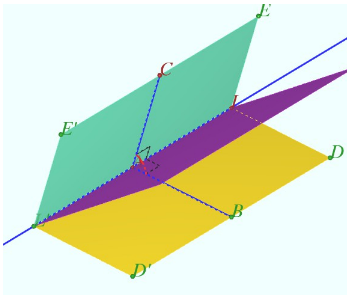
1. Виды углов

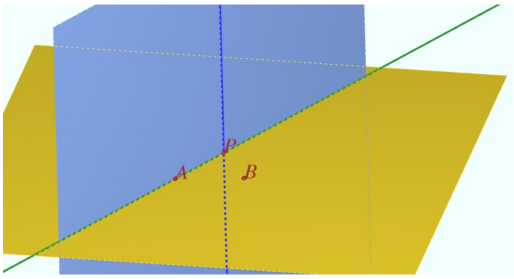
1.3. Двугранный угол

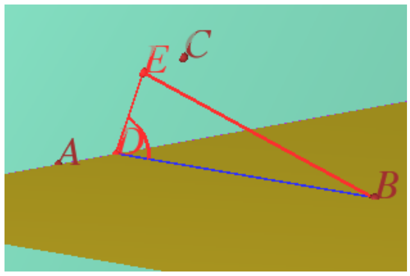
Пособие содержит описание основных понятий, методов расчёта, примеры решения множества задач. Решены задачи на поиск двугранного угла в пирамиде, в тетраэдре, в кубе. На ряде примеров показаны два основных метода поиска угла: с использованием теоремы о площади ортогональной проекции плоской фигуры (ТОПОР) и линейного угла между перпендикулярными ребру двугранного угла отрезками. Прямые двугранные углы рассматриваются в основном в пособии «Перпендикулярность в пространстве».

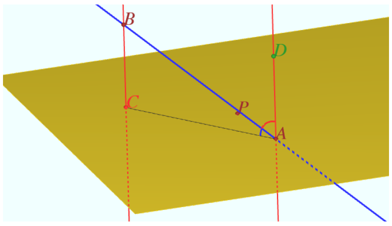
Оглавление

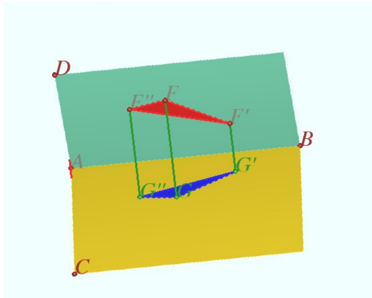
Вход в интерактивные файлы выполняется с помощью щелчка по рисунку. Чтобы рисунки из комплекта ожили, установите на Вашем компьютере программу GInMA с сайта http://deoma-cmd.ru/Products/Geometry/GInMA.aspx **Бесплатная базовая версия** комплекта позволяет ознакомиться с возможностями пособия. Во всех файлах доступны первые шаги решений задач с условием и исходным интерактивным чертежом, в отдельных файлах доступны все шаги решения вплоть до ответа. Для полноценного использования комплекта рекомендуем его купить. **Покупка даст возможность видеть все шаги решения в интерактивном файле и сохранять созданные Вами варианты заданий.**

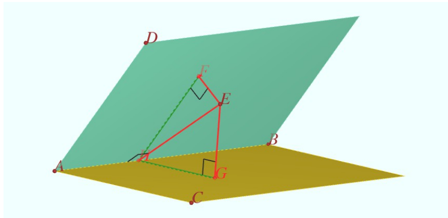

E
C
E'
D
B
D'

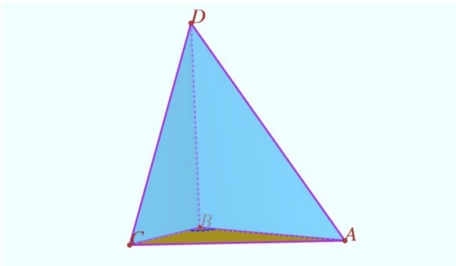

P
A
B

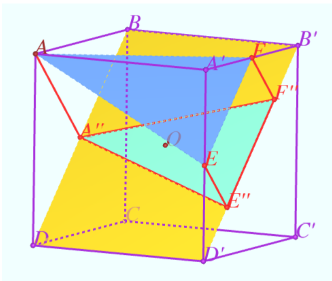

E
C
A
D
B

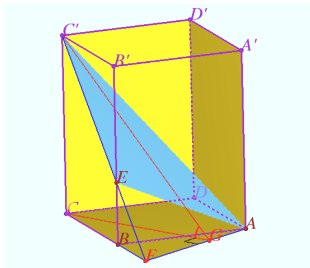

B
D
C
P
A

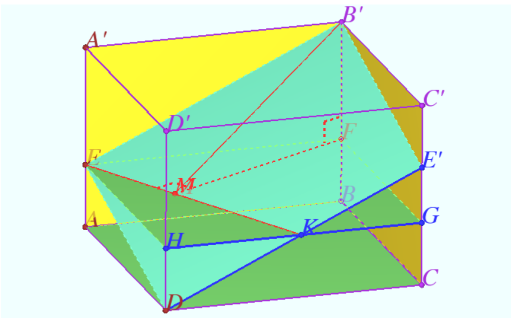

D
F
F'
B
A
G'
C

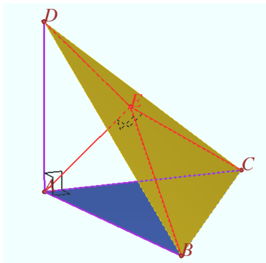

D
F
E
A
B
G
C

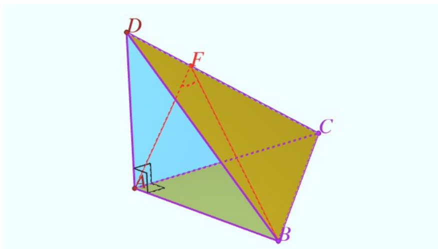

D
B
C
A

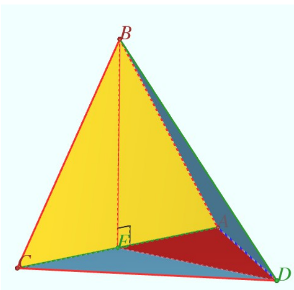

B
B'
A
A'
F
F''
A''
O
E
E''
C
D
D'
C'

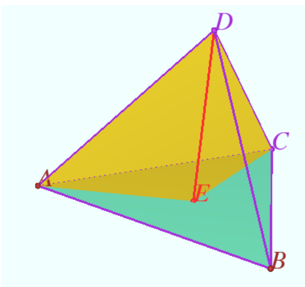

C'
D'
A'
B'
E
C
B
F
G
A

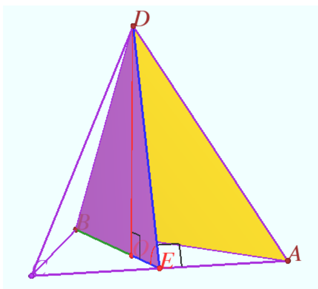

B'
A'
C'
D'
F
E
E'
M
B
A
G
H
K
C
D

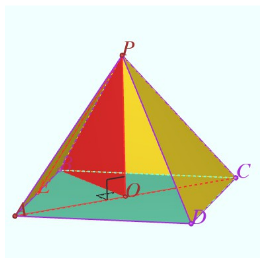

D
E
C
A
B

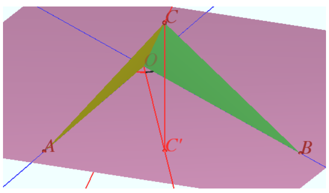

D
F
C
A
B


B
E
C
D


D
C
A
E
B


D
B
C
E
A


P
C
O
A
D


C
O
A
C'
B

1.3.1 Основные понятия

Двугранным углом называют часть пространства, заключённую между двумя полуплоскостями, имеющими общую границу.

Грани двугранного угла— это полуплоскости, ограничивающие двугранный угол.

Ребро двугранного угла — это общая для граней двугранного угла прямая.

Линейным углом двугранного угла называют угол, возникающий при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру двугранного угла.

Можно сказать, что линейный угол образован лучами, которые лежат в гранях двугранного угла и перпендикулярны его ребру. Величина линейного угла не зависит от положения точки из которой исходят лучи на ребре.

Если у двугранных углов равны линейные углы, то ***равны и двугранные углы***.

Биссекторной плоскостью двугранного угла называют плоскость, которая делит этот угол на два равных двугранных угла. Биссекторная плоскость проходит через ребро двугранного угла и точку на биссектрисе любого линейного угла, не лежащую на ребре.

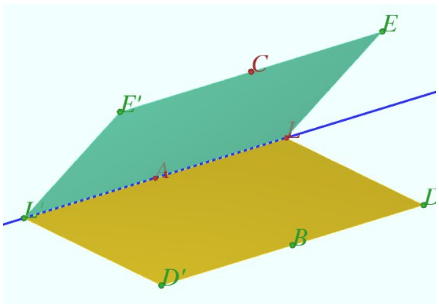


Рис. 0,а. Двугранный угол

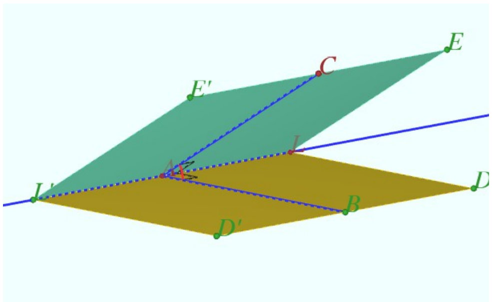


Рис. 0,б. Линейный угол

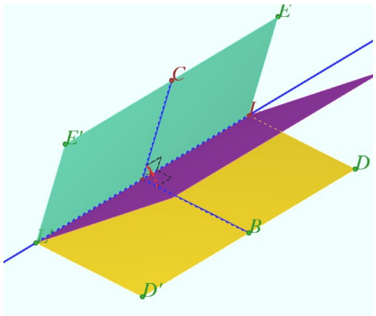


Рис. 0,в. Биссекторная плоскость

1.3.2 Метод определения величины двугранного угла

Пусть существует треугольник, лежащий в одной грани угла, известна его площадь ***S,*** проекция на другую грань и её площадь ***s***. Тогда величину угла можно определить по соотношению

$$\cos\alpha = \frac{s}{S}. \tag{1}$$

Это следствие теоремы о площади ортогональной проекции плоской фигуры.

Формула Герона

Для вычисления площади треугольника со сторонами a, b, c часто используется формула Герона, стандартный вид которой $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{a+b+c}{2}$. Укажем вид этой формулы, который удобен, если стороны находят по формулам Пифагора:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}. \tag{2}$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}. \tag{3}$$

1.3.3 Признак перпендикулярности плоскостей

Шаг 1. Если одна из двух плоскостей содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Шаг 2. Вопрос. Две плоскости перпендикулярны одной (***APB***). Верно ли, что эти плоскости параллельны?

Шаг 3. Две плоскости пересекаются по прямой, перпендикулярной плоскости ***APB***. Пример таких плоскостей показан на рисунке. Для того, чтобы отвергнуть утверждение достаточно привести ровно один контрпример.

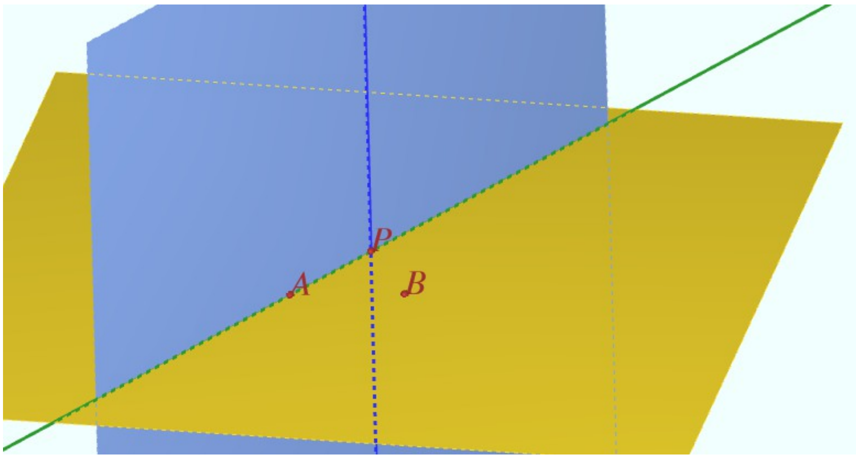


Рис. 1. Признак перпендикулярности плоскостей

1.3.4 Расстояние от точки до грани и до ребра двугранного угла

Шаг 1. Задание. Точка ***B*** находится в плоскости одной из граней двугранного угла величиной α на расстоянии ***b*** от ребра. Найдите расстояние от ***B*** до плоскости второй грани.

Шаг 2. Пусть ***BE*** – это перпендикуляр к плоскости. Тогда искомое расстояние равно длине отрезка ***BE***. Из треугольника ***BED*** находим $BE = BD \sin\angle BDE = b \sin\alpha$.

Расстояние от точки до ребра двугранного угла

Шаг 1.Задание. Пусть ***E*** – проекция точки ***B*** на плоскость одной из граней двугранного угла величиной α. Найдите расстояние от ***E*** до ребра двугранного угла, ***BE = b***.

Решение. ***BE*** – это перпендикуляр к плоскости. ***BD*** – это перпендикуляр к ребру. Из треугольника ***BED*** находим $DE = BE \operatorname{ctg}\angle BDE = b \operatorname{ctg} \alpha$.

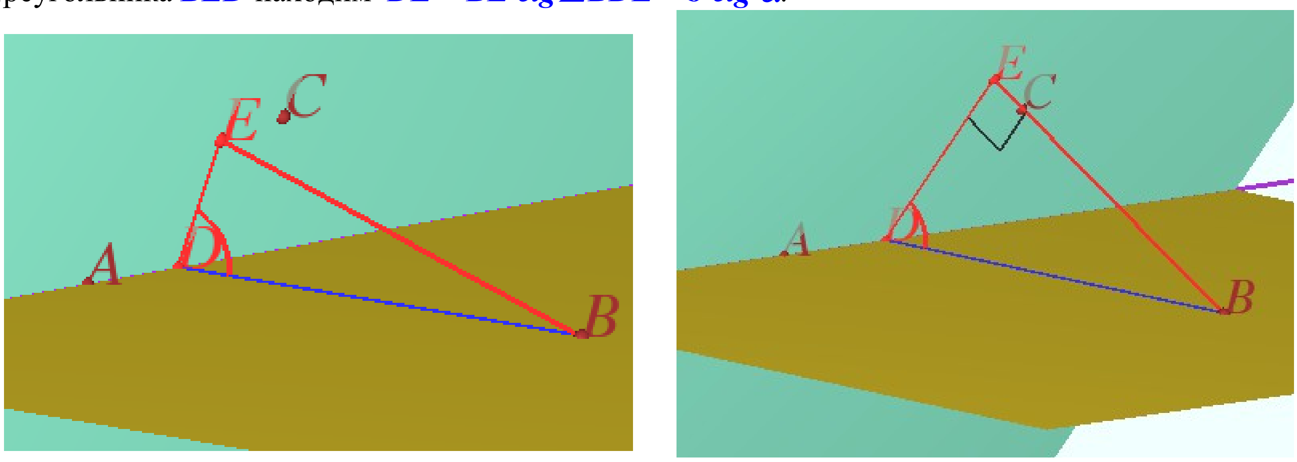


Рис. 2. Расстояние от точки до грани и до ребра двугранного угла

1.3.5 Сумма углов прямой с плоскостью и с перпендикулярной плоскости прямой

Шаг 1. Задание. Найдите сумму углов, которые произвольная прямая ***AB*** образует с плоскостью ***P*** и перпендикулярной к плоскости прямой.

Шаг 2. Пусть ***A*** — точка пересечения прямой и плоскости, ***C*** — проекция ***B*** на плоскость ***P***. Тогда $\angle BAC$ — это угол между прямой и плоскостью, $\angle BAD$— это угол между прямой и перпендикуляром к плоскости. Искомая сумма равна углу $\angle BAC + \angle BAD = \angle CAD = 90°$.

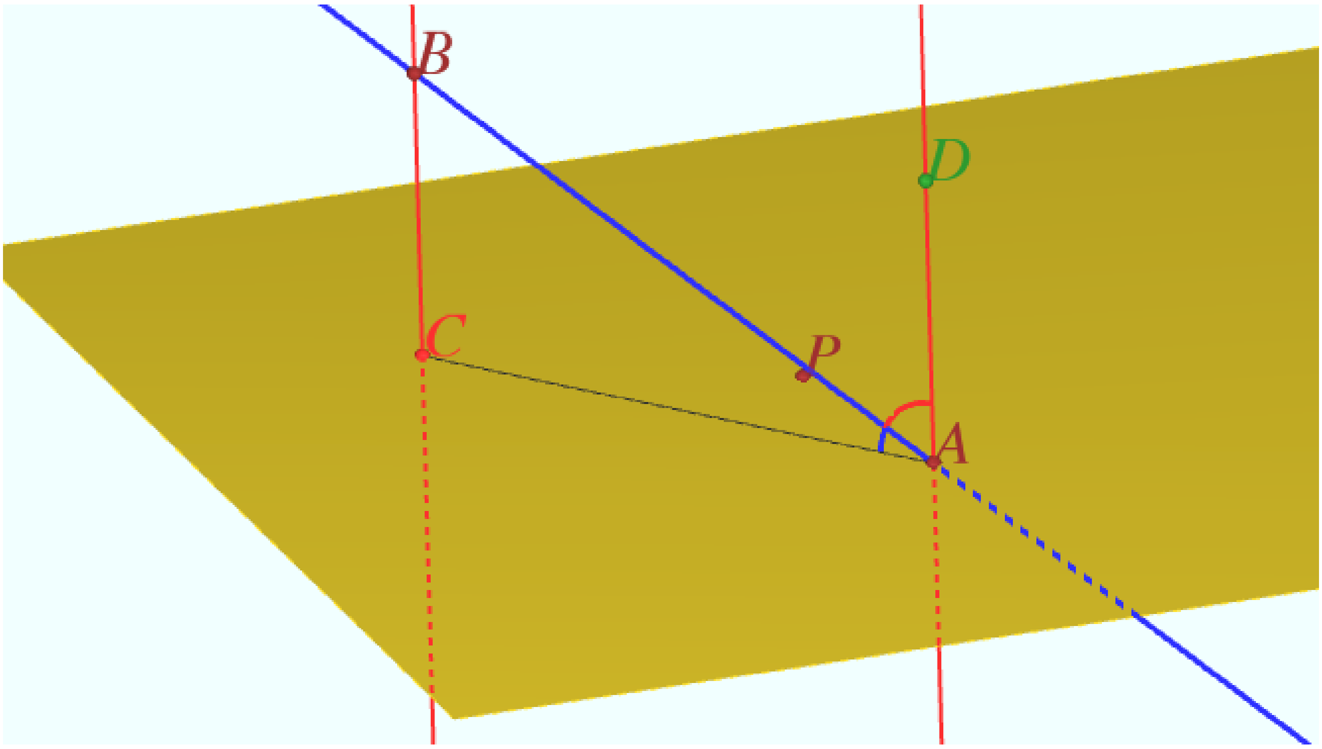


Рис. 3. Сумма углов прямой с плоскостью и с перпендикулярной плоскости прямой

1.3.6 Основное проективное соотношение для двугранного угла

Шаг 1. Задание. Точка ***D*** расположена в грани ***ABD*** двугранного угла величины α с ребром ***AB, AD⊥AB. AE*** – проекция ***AD*** на ***ABC***. Найдите отношение ***AE : AD***.

Шаг 2. Из прямоугольного треугольника ***AED*** находим: ***AE : AD = cos*** α.

Шаг 3.Задание. E'GG' расположен в грани ***ABD*** двугранного угла величины α с ребром ***AB***, причём ***EF'||AB. E'GG'*** – проекция ***EFF'*** на ***ABC***. Найдите отношение ***S(E'GG') : S(EFF')***.

Шаг 4. Прямая ***EF'*** параллельна ***AB***, значит, ***EF'*** параллельна плоскости ***ABC***, ***EF'=E'G'***. Высота ***h*** треугольника ***E'GG'*** проведенная из вершины ***F*** перпендикулярна ***AB,*** значит, высота ***E'GG'*** – проекция ***h*** на ***ABC*** равна ***h cos*** α. Отношение площадей:

$$S(E'GG') : S(EFF') = (E'G' \cdot h \cos\alpha) : (EF' \cdot h) = \cos\alpha.$$

Шаг 5. Задание. Треугольник ***FF'F''*** расположен в грани ***ABD*** двугранного угла величины α с ребром ***AB. GG'G''*** – проекция ***FF'F''*** на грань ***ABC***. Найдите отношение ***S(GG'G'') : S(FF'F'').***

Шаг 6. Пусть в треугольнике ***FF'F''*** нет стороны, параллельной ***AB***. Разрежем его прямой, параллельной ***AB*** и проходящей через одну из вершин. Площадь проекции каждой части относится к площади исходного треугольника, как $\cos\alpha$. Значит, ***S(E'GG') : S(EFF') = cos*** α.

Задание Многоугольник ***F*** расположен в грани ***ABD*** двугранного угла величины α с ребром ***AB. G*** – проекция ***F*** на ***ABC***. Найдите $S_G : S_F$.

Задание Фигура ***F*** расположена в грани ***ABD*** двугранного угла величины α с ребром ***AB. G*** – проекция ***F*** на ***ABC***. Найдите $S_G : S_F$.

Ответ: $S_G : S_F = \cos\alpha$.

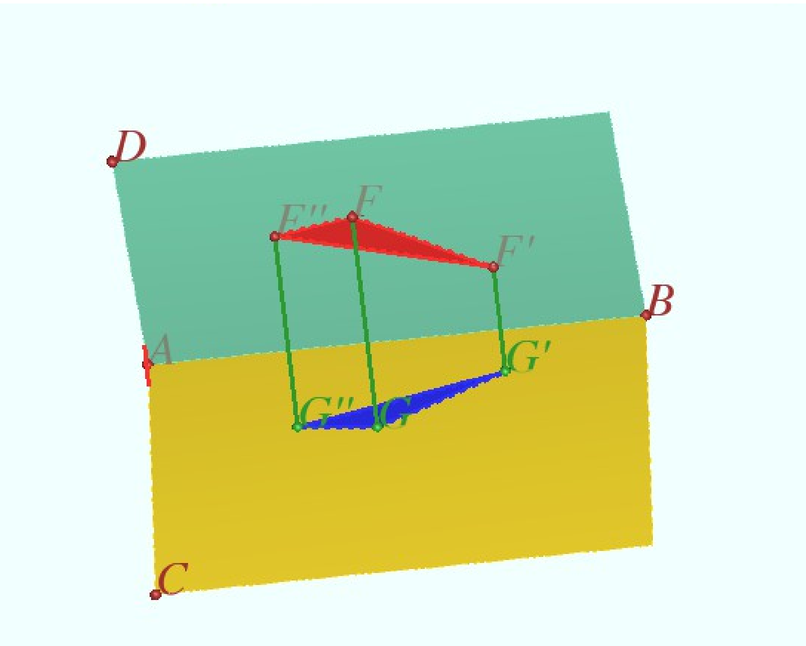


Рис. 4. Основное проективное соотношение для двугранного угла

1.3.7 Угол между нормалями (перпендикулярами) к граням

Шаг 1. Задание. Точка ***E*** расположена внутри двугранного угла величиной α. ***EF*** и ***EG*** – перпендикуляры, опущенные на грани угла. Найдите $\angle FEG$.

Шаг 2. Плоскость ***FHE*** перпендикулярна обеим граням двугранного угла, значит и ребру ***AB.*** Если точка ***H*** лежит на ***AB*** в плоскости ***FHE,*** то $EH \perp AB$. Тогда $FH \perp AB, GH \perp AB$. Значит,

$$\alpha = \angle FHE + \angle GHE, \quad \angle FEG = \angle FEH + \angle GEH = \pi - \alpha.$$

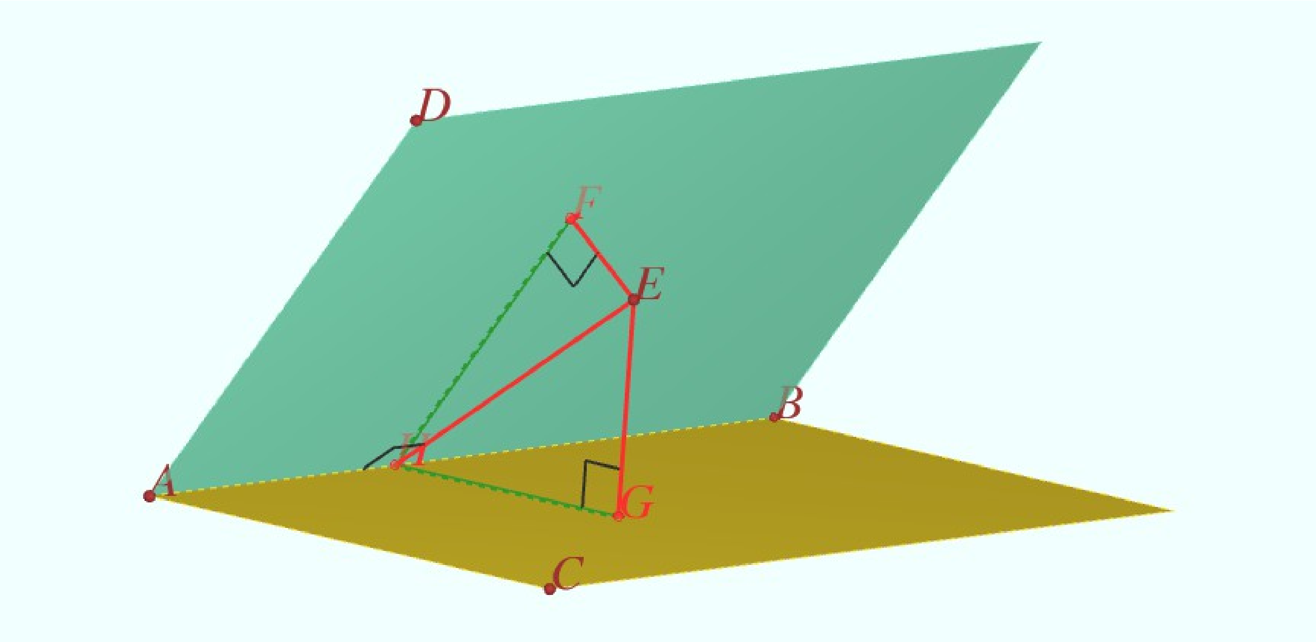


Рис. 5. Угол между нормалями (перпендикулярами) к граням

1.3.8 Углы в тетраэдре ребро которого является высотой

Шаг 1. Задание. В пирамиде ***ABCD*** $\angle ABC = \alpha$, ***B*** – проекция ***D*** на плоскость ***ABC***. Найдите двугранный угол с ребром ***BD***.

Решение. Прямая ***BD*** перпендикулярна плоскости ***ABC***, значит ***AB*** и ***BC*** перпендикулярны ребру ***BD***. По определению, $\angle ABC$ – искомый.

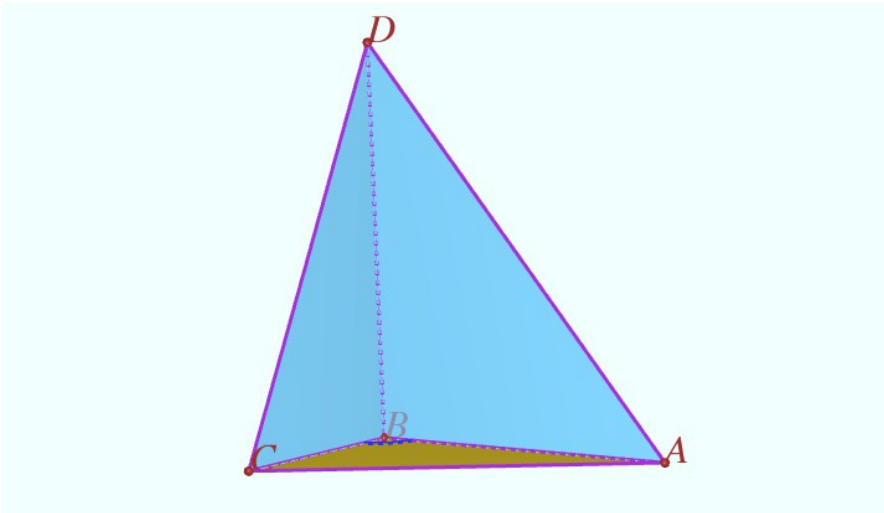


Рис. 6. Углы в тетраэдре ребро которого является высотой

1.3.9 Двугранные углы внутри куба

Шаг 1. Задание. В кубе ***ABCDA'B'C'D'*** найдите угол между плоскостями ***AEF*** и ***CDD'***, если ***F*** и ***E*** – середины рёбер ***A'B'*** и ***A'D'***.

Шаг 2. Пусть ***AB = 2.*** Найдём площадь ΔAEF и его проекцию на плоскость ***CDD'***. $AE^2 = AF^2 = 5$, $EF^2 = 2$, $S_{AEF} = 1.5$. $DD' = 2$, $F'D' = 1$, $S_{F'DD'} = 1$. По свойству проекций, $\cos\alpha = S_{F'DD'} : S_{AEF} = 2/3$.

Шаг 3. Задание. В кубе ***ABCDA'B'C'D'*** найдите угол **β** между плоскостями ***AEF*** и ***BDD'***, если ***F*** и ***E*** – середины рёбер ***A'B'*** и ***A'D'***.

Шаг 4. Найдём проекцию ΔAEF на плоскость ***BDD'***. Грани куба ***ABD*** и ***A'B'D'*** перпендикулярны плоскости ***BB'D,*** так как $BB' \perp BB'D$. Значит, проекция ***A*** на плоскость ***BB'D*** лежит на ***BD***, проекции ***E и F*** — на ***B'D'.***

Шаг 5. $DD' \perp B'D'$, значит, высота ΔAEF равна ***DD'.*** $EF \| B'D'$, значит, $F''E'' = FE = BD/2$.

$$S_{A''E''F''} = \frac{DD' \cdot EF}{2} = \sqrt{2}, \cos\beta = \frac{S_{A''E''F''}}{S_{AEF}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin\beta = \frac{1}{3}.$$

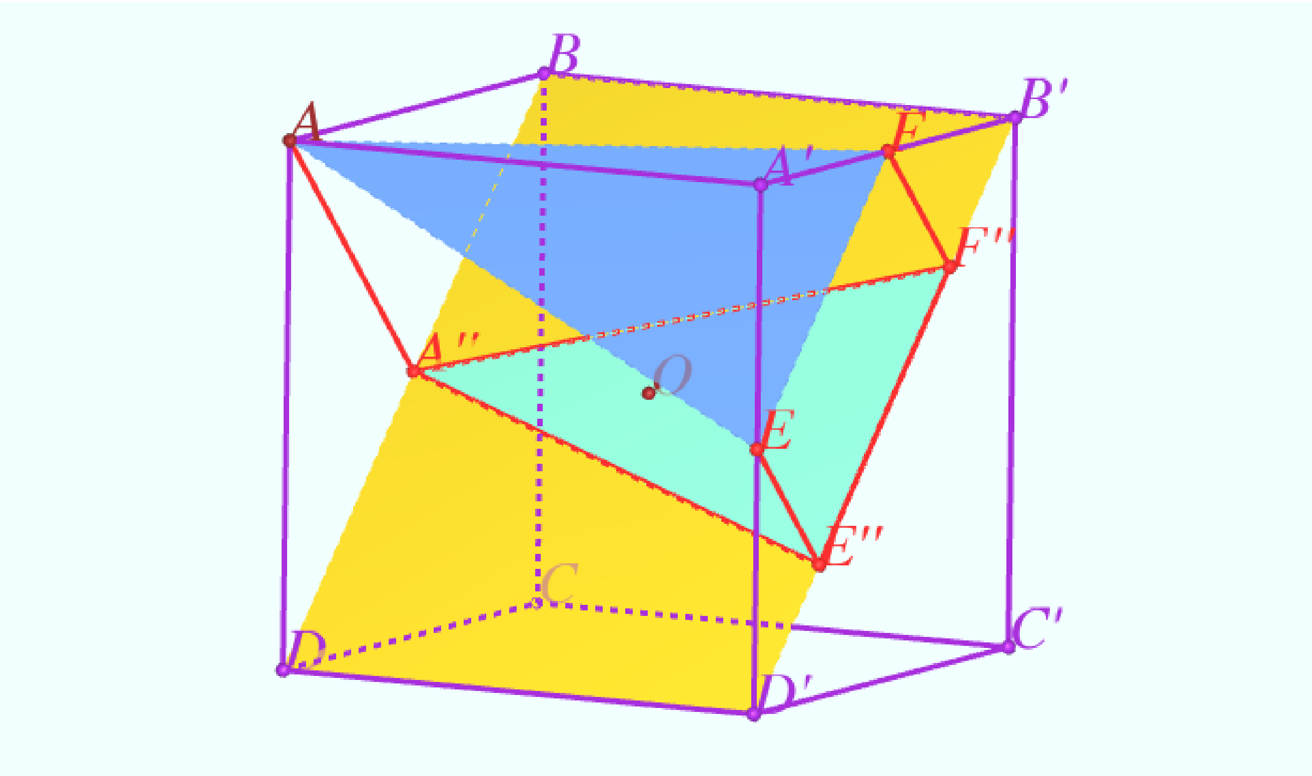


Рис. 7. Двугранные углы внутри куба

1.3.10 *Двугранный угол в правильной четырёхугольной призме*

(свободно используемые интерактивные рисунки, выполнены по заказу педагогического факультета Московского Государственного Университета)

Шаг 1. Задание. В правильной четырёхугольной призме ***ABCDA'B'C'D'*** найдите угол между плоскостями ***AEC'*** и ***ABC,*** если точка ***E*** расположена на ребре ***BB'*** $AB=a=3, BE=b=1, B'E=c=3$.

Шаг 2. Решение. Известно, что в основании правильной призмы лежит правильный многоугольник, то есть в основании правильной четырёхугольной призмы лежит квадрат. Рёбра правильной призмы перпендикулярны плоскости основания.

Пусть ***F*** – точка пересечения прямых ***BC*** и ***C'E***. Тогда ***AF*** – ребро искомого двугранного угла. Из подобия треугольников $\Delta C'CF \sim \Delta C'B'E$, находим: $\frac{CF}{CC'}=\frac{B'C'}{B'E}=\frac{BC}{B'E}$.

Шаг 3. Пусть ***G*** – основание перпендикуляра, опущенного из ***C*** на ***AF***. Угол $\angle CGC'$ – искомый. Из подобия треугольников $\Delta ABF \sim \Delta CGF$, находим: $\frac{CF}{CG}=\frac{AF}{AB}$.

Шаг 4. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{CC'}{CG}=\frac{CC'}{CF}\sqrt{1+\frac{BE^2}{B'E^2}}=\frac{\sqrt{BE^2+B'E^2}}{AB}=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$. $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Шаг 5. Пользуемся стандартным решением (1). Площадь ΔABC который является проекцией $\Delta AEC'$ на плоскость ***ABC*** $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2}{2}$, так как этот треугольник — это половина квадрата, лежащего в основании.

Площадь $\Delta AEC'$ ищем по формуле Герона (2). По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников, $AE^2=AB^2+BE^2=a^2+b^2$, $C'E^2=C'B'^2+B'E^2=a^2+c^2$, $C'A^2=AB^2+BC^2+B'B^2=2a^2+(b+c)^2$.

Шаг 6. Отсюда $S=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Таким образом, косинус искомого угла $\cos\alpha=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AEC'}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Если $a=3, b=1, c=3$, то $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{19}}$.

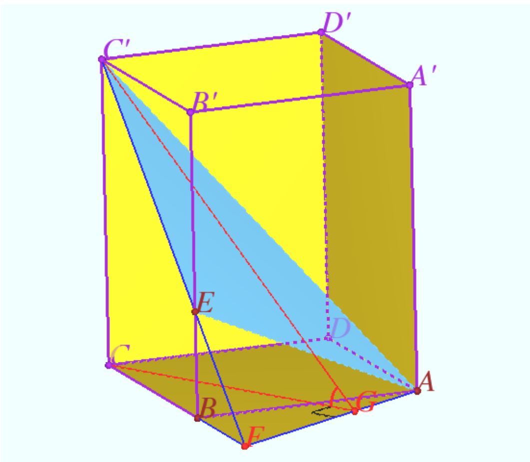


Рис. 8. Двугранный угол в правильной четырёхугольной призме.

1.3.10.a Двугранный угол в правильной четырёхугольной призме

Шаг 1. Задание. Точка ***E*** расположена на ребре ***AA'*** правильной четырёхугольной призмы ***ABCDA'B'C'D'***. Найдите угол α между плоскостью основания ***ABC*** и плоскостью ***B'DE***, если $AB=a=3, AE=b=1, A'E=c=3$.

Шаг 2. Решение. Известно, что в основании правильной призмы лежит правильный многоугольник, то есть в основании правильной четырёхугольной призмы лежит квадрат. Рёбра правильной призмы перпендикулярны плоскости основания.

На рисунке построено сечение призмы плоскостью $B'ED$. Эта плоскость пересекает параллельные плоскости противолежащих граней $AA'B'B$ и $CC'D'D$ по параллельным прямым. $\angle A'BE=\angle B'ED$, как углы с параллельными сторонами. Прямоугольные треугольники $\Delta A'B'E=\Delta CDE'$ равны по катету ($A'B'=CD$) и углу. Значит, $CE'=A'E=c$.

Шаг 3. На рисунке построено сечение призмы плоскостью $EFGH$, параллельной основанию $ABCD$. Угол между плоскостью этого сечения и плоскостью $B'ED$ равен искомому. Возникли подобные треугольники $\Delta KHD\sim\Delta DCE'$, значит, $\frac{HK}{CD}=\frac{HD}{CE'}, HK=\frac{a\cdot b}{c}$.

Шаг 4. Опустим из точки F перпендикуляр FM на прямую EK, по которой пересекаются сечения. $\angle EKH=\angle KEF$, значит, подобны треугольники $\Delta FEM\sim\Delta EKH$, $\frac{FM}{EH}=\frac{EF}{EK}, FM=\frac{EH\cdot EF}{EK}=\frac{a^2}{EK}$.

Шаг 5. Ребро BB' перпендикулярно плоскости $EFGH$, значит, FM – это проекция $B'M$ на плоскость $EFGH$. По теореме о трёх перпендикулярах, $B'M\perp EK$, значит, $\angle B'MF$ равен искомому углу между плоскостями.

$$tg\,\alpha=\frac{B'M}{FM}=\frac{c}{a}\frac{EK}{a}=\frac{c}{a}\sqrt{1+\frac{HK^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}. \qquad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

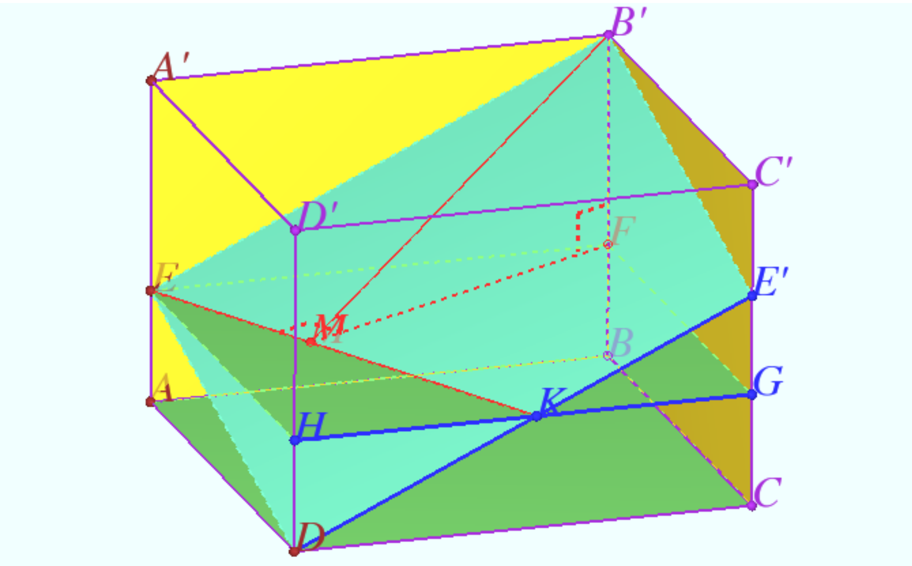


Рис. 8'. Двугранный угол в правильной четырёхугольной призме.

1.3.11 Углы в пирамиде с тремя взаимно перпендикулярными ребрами

Шаг 1. Задание. Пусть ребра ***AB, AC*** и ***AD*** пирамиды ***ABCD*** взаимно перпендикулярны, ***S*** – площадь ***ΔBCD, s*** – площадь ***ΔABC***. Найдите угол с ребром ***BC***.

Шаг 2. Поскольку ***A*** – это проекция ***D*** на плоскость ***ABC***, то треугольник ***ABC*** – это проекция ***BCD*** на плоскость ***ABC***. По свойству проекций, $s : S = \cos\alpha$.

Шаг 3. Задание. Пусть ребра ***AB, AC*** и ***AD*** пирамиды ***ABCD*** взаимно перпендикулярны, ***S*** – площадь ***ΔBCD, s*** – площадь ***ΔABC***. ***E*** – проекция ***A*** на ***BCD***. Найдите площадь ***ΔBCE***.

Шаг 4. Поскольку ***E*** – это проекция ***A*** на плоскость ***BCD***, то треугольник ***BCE*** – это проекция ***ABC*** на плоскость ***BCD***. Значит, $S(BCE) : S(ABC) = \cos\alpha$, $S(BCE) = s\cos\alpha = s^2 : S$.

Шаг 5. Задание. Пусть ребра ***AB, AC*** и ***AD*** пирамиды ***ABCD*** взаимно перпендикулярны. Найдите $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$, где α, β и γ – углы с рёбрами ***BC, BD*** и ***CD***.

Шаг 6. Площадь грани ***BCD*** равна сумме площадей проекций граней ***BCE, BDE*** и ***CDE***

$$(S(BCE) + S(BDE) + S(CDE)) : S(BCD) =$$

$$= S(BCE) : S(BCD) + S(BDE) : S(BCD) + S(CDE) : S(BCD) =$$

$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

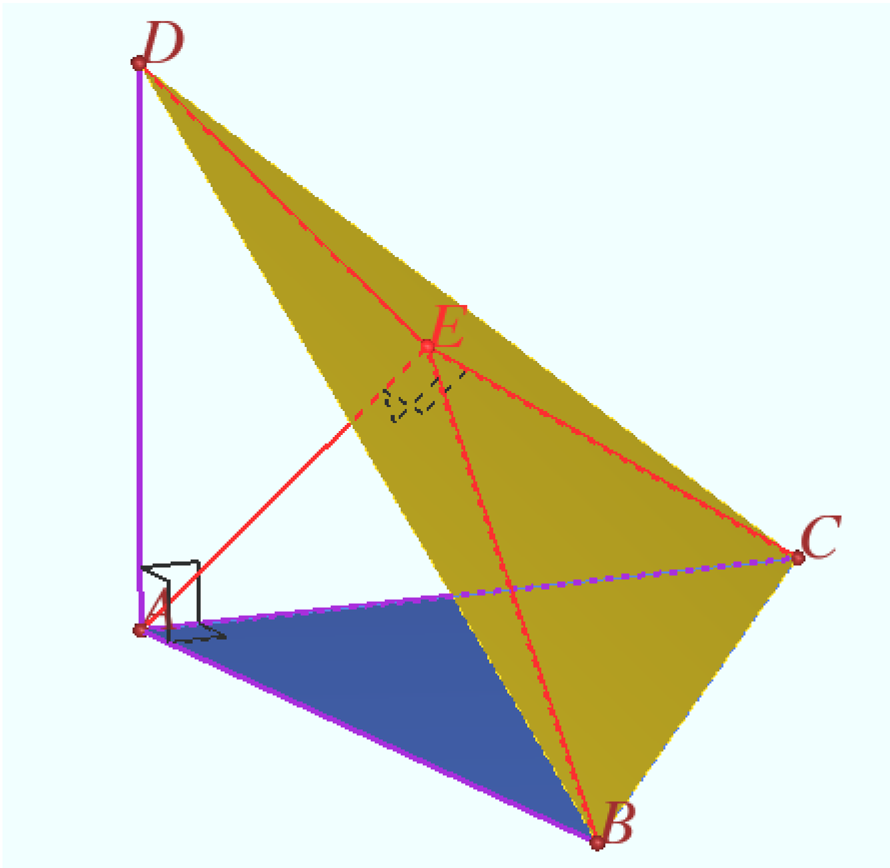


Рис. 9. Углы в пирамиде с тремя взаимно перпендикулярными ребрами

1.3.12 *Тетраэдр с прямыми плоскими углами при одной вершине*

Шаг 1. Задание. Все плоские углы при вершине ***A*** тетраэдра ***ABCD*** прямые. ***AB = AC = AD***$\sqrt{2}$. Найдите двугранные углы тетраэдра.

Шаг 2. Прямая ***AD*** перпендикулярна плоскости ***ABC,*** значит, плоскость ***ABD*** перпендикулярна плоскости ***ABC*** и угол с ребром ***AB*** прямой. Аналогично углы с ребрами ***AC*** и ***AD*** прямые.

Шаг 3. Пусть ***E –*** середина ***BC***. В равнобедренных треугольниках ***∆ABC*** и ***∆BCD*** медианы ***AE*** и ***DE –*** это высоты. Двугранный угол с ребром ***BC*** равен ***∠AED.*** В равнобедренном прямоугольном треугольнике ***ABC*** $AE = \frac{AB}{\sqrt{2}} = AD$. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ***ADE ∠AED= 45°.***

Шаг 4. Точка ***A –*** это проекция точки ***B*** на плоскость ***ABD***. Значит, ***∆ACD*** это проекция ***∆BCD***. По свойству проекций, косинус двугранного угла с ребром ***BC*** $\cos\beta = \frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \frac{AD \cdot AC}{DE \cdot BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60°$.

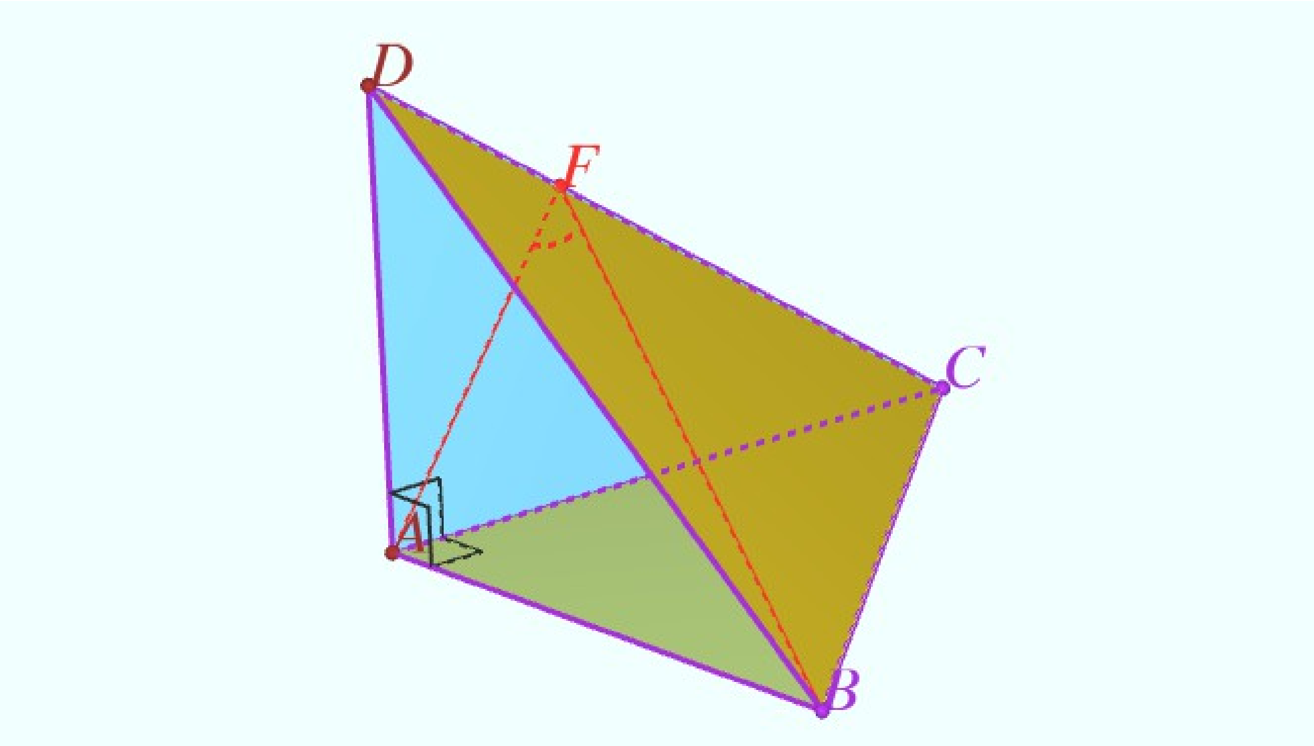


Рис. 10. Тетраэдр с прямыми плоскими углами при одной вершине

1.3.13 Тетраэдр с прямым двугранным углом

Шаг 1. Задание. В тетраэдре ***ABCD AC = BD, AB = BC = CD***, двугранный угол при ребре ***AC*** прямой. Найдите двугранный угол при ребре ***AD***.

Шаг 2. Треугольники ***ΔABD = ΔDCA*** по трём сторонам ***AB = CD, BD = AC, AD*** – общая.

Шаг 3. Найдём проекцию ***ΔABD*** на плоскость ***ACD***. Пусть ***BE*** – высота и медиана равнобедренного ***ΔABC***. Тогда ***ΔAEC*** – это проекция ***ΔABD***. По свойству проекций косинус двугранного угла с ребром ***AD***.

$$\cos\alpha = \frac{S_{AED}}{S_{ABD}} = \frac{AE}{AC}\cdot\frac{S_{ACD}}{S_{ABD}} = \frac{1}{2}, \alpha = 60^\circ .$$

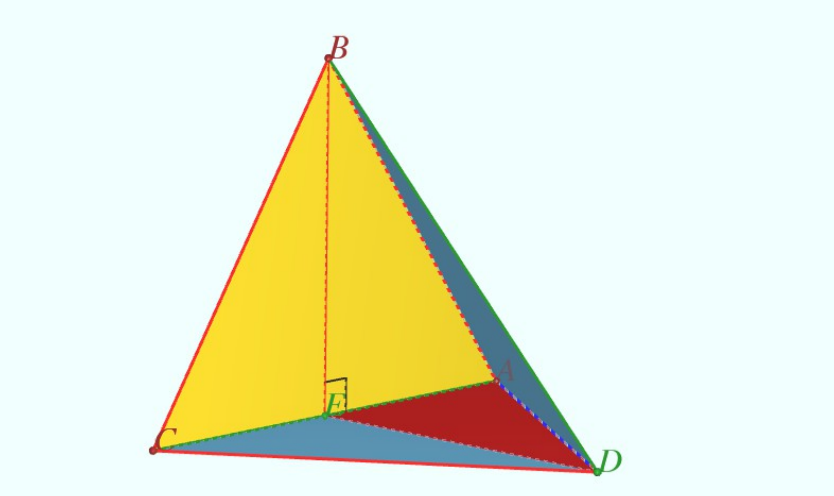


Рис. 11. Тетраэдр с прямым двугранным углом

1.3.14 Двугранный угол в правильном тетраэдре

Шаг 1. Задание. Найдите двугранные углы в правильной пирамиде, у которой равны все стороны (в правильном тетраэдре).

Шаг 2. Пусть точка ***E*** – это центр грани ***ABC.*** Тогда ***E*** – это проекция вершины ***D*** на ***ABC. ACE***– проекция треугольника ***ACD*** на ***ABC***.

$$3S_{AEC} = S_{ABC} = S_{ACD}, \quad \cos\alpha = S_{AEC} : S_{ACD} = 1/3.$$

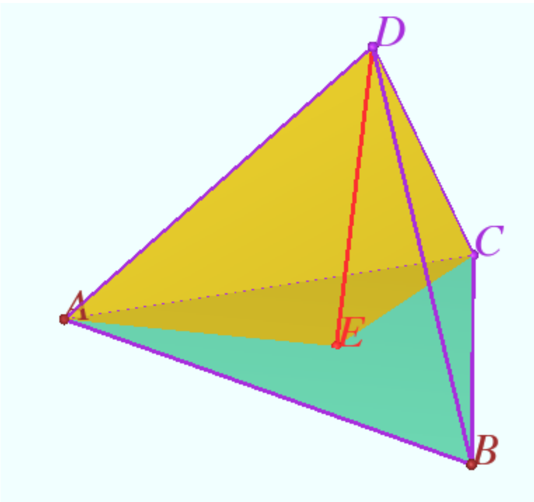


Рис. 12. Двугранный угол в правильном тетраэдре.

1.3.15 Двугранные углы в правильной треугольной пирамиде

Шаг 3. Задание. Найдите двугранный угол β при основании правильной пирамиды ***PABC***, если сторона основания равна ***a***, а апофема боковой грани равна ***h***.

Шаг 2. Пусть ***O*** – центр основания, ***E*** — середина ***AC***. ***OE = BE***/3. Тогда ***OD*** это высота пирамиды. По теореме Пифагора, $OE^2 + DO^2 = AE^2$ или $H^2 = h^2 - a^2/12$.

Шаг 4. Как апофема ***DE***, так и высота основания ***BE*** перпендикулярны ***AC.*** Значит, искомый угол ***DEO***, $\cos\beta = \frac{EO}{DE} = \frac{a}{2h\sqrt{3}}$.

Шаг 5. Задание. Найдите двугранный угол γ между соседними гранями правильной пирамиды ***PABC***, если высота пирамиды равна ***H***, а апофема боковой грани равна ***h***.

Шаг 6. ***ΔBDE*** – проекция ***ΔABD*** на плоскость ***BDE***. Угол между ***ABD*** и ***BDE*** – это половина искомого.

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{DO\cdot BE}{DE\cdot AB} = \frac{Ha\frac{\sqrt{3}}{2}}{ha} = \frac{H\sqrt{3}}{2h}, \gamma = 2\arccos\frac{H\sqrt{3}}{2h}.$$

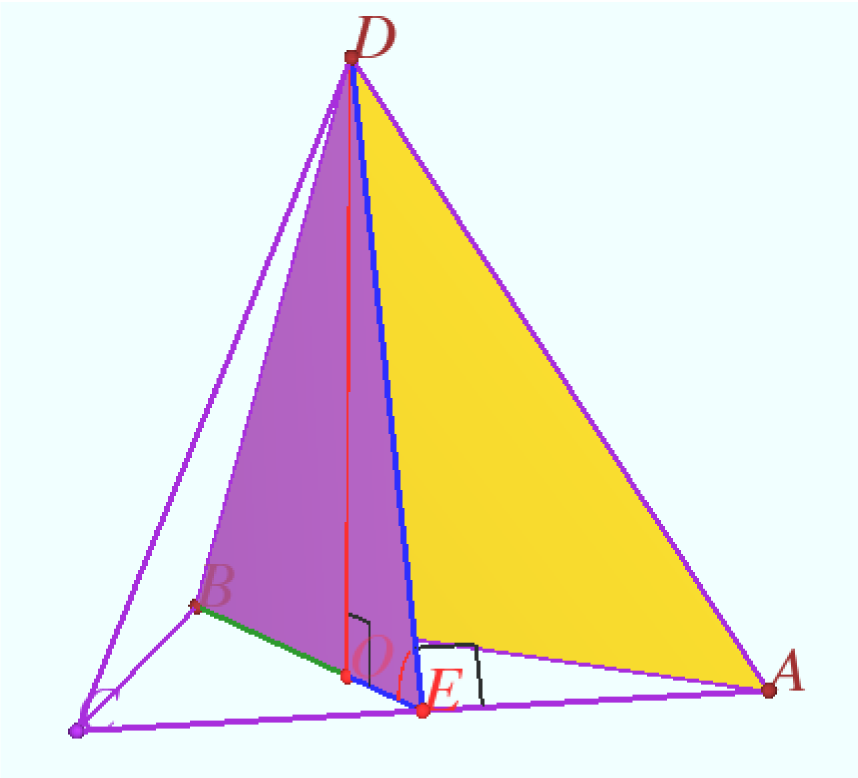


Рис. 13. Двугранные углы в правильной треугольной пирамиде

1.3.16 Двугранные углы в правильной четырёхугольной пирамиде

Шаг 1. Задание. Найдите двугранный угол β при основании правильной четырёхугольной пирамиды ***PABCD***, если сторона основания равна ***a***, а апофема боковой грани равна ***h***.

Шаг 2. Решение. Пусть ***E*** – середина ***AB, O*** – центр основания. Апофема ***PE*** и отрезок ***OE*** перпендикулярны ребру ***AB***. Значит, $\angle PEO = \beta$ – искомый угол. Высота пирамиды ***PO*** перпендикулярна основанию, $\angle POE = 90°$, $\cos\beta = \dfrac{a}{2h}$, $\beta = \arccos\dfrac{a}{2h}$.

Шаг 3. Задание. Найдите двугранный угол γ между соседними гранями правильной пирамиды ***PABCD***, если высота пирамиды равна ***H***, а апофема боковой грани равна ***h***.

Шаг 4. Решение. Диагональ ***AC*** перпендикулярна ***BO*** и ***PO***, значит, она перпендикулярна плоскости ***BPO.*** ΔBPO – это проекция ΔABP на плоскость ***BPO***. Угол между ***ABP*** и ***BPO*** – это половина искомого. $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{PO\cdot BO}{PE\cdot AB} = \dfrac{Ha\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{ha} = \dfrac{H\sqrt{2}}{2h}$, $\gamma = 2\arccos\dfrac{H\sqrt{2}}{2h}$.

Задание. Найдите двугранный угол β при основании правильной ***n***–угольной пирамиды, если площадь основания ***S***, а площадь боковой грани ***Q***.

Решение. Проекция каждой боковой грани ***ABP*** на плоскость основания – это треугольник ***ABO***. Основание состоит из ***n*** таких равных треугольников. Отношение площади ***ABO*** к площади грани ***ABP*** боковой поверхности $\cos\beta = S/(Qn)$. $\cos\beta = \dfrac{S}{nQ}$, $\beta = \arccos\dfrac{S}{nQ}$.

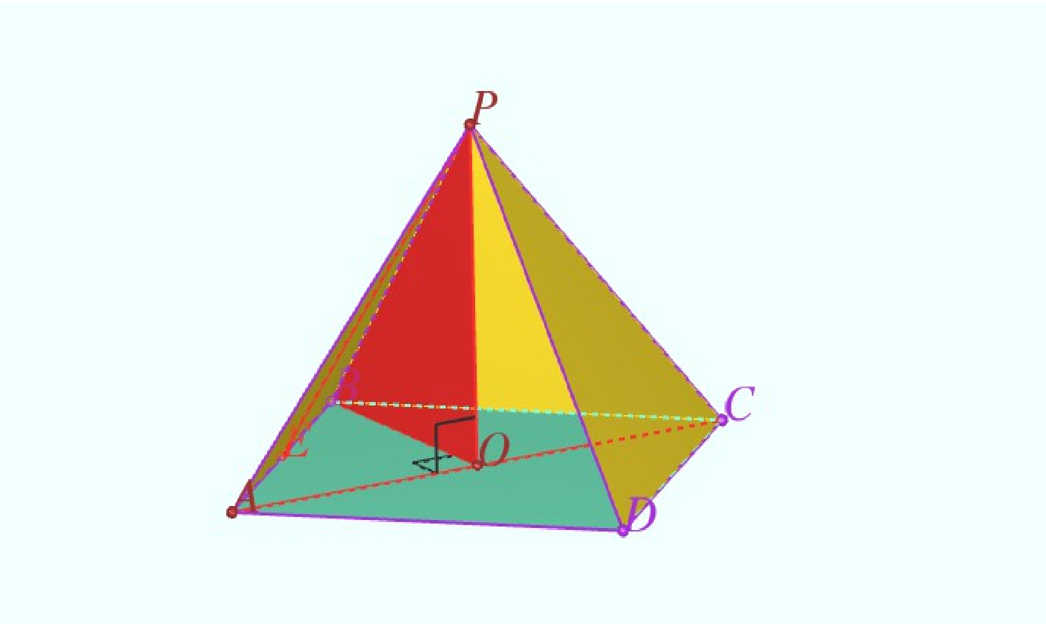


Рис. 14. Двугранные углы в правильной четырёхугольной пирамиде

Задание. В правильной ***n***–угольной пирамиде ***PABCD...*** известен угол при вершине боковой грани $\angle APB = 2\alpha$. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

Решить самостоятельно, пользуясь интерактивными иллюстрациями.

1.3.16.a Дан угол при вершине грани

Найдите двугранный угол β при основании правильной четырёхугольной пирамиды ***PABCD***, если известен угол при вершине боковой грани $\angle APB = 2\alpha$.

Решение. Пусть сторона основания ***AB*** = 2***a***. Тогда апофема $h = a\,ctg\,\alpha$, площадь каждой боковой грани $S_{ABP} = \frac{2\,a\,h}{2} = a^2\,ctg\,\alpha$. Площадь проекции грани на плоскость основания равна четверти площади основания $S_{ABO} = a^2$. По свойству проекции,

$\cos\beta = tg\alpha$, $\beta = \arccos(tg\alpha)$.

1.3.16.b Даны сторона основания и апофема

Найдите двугранный угол β при основании правильной ***n***–угольной пирамиды ***PABCD...***, если сторона основания равна ***a***, а апофема боковой грани равна ***h***.

Решить самостоятельно, пользуясь интерактивными иллюстрациями.

1.3.16.c Даны высота пирамиды и апофема

Найдите двугранный угол γ между соседними гранями правильной ***n***–угольной пирамиды ***PABCD...***, если высота пирамиды равна ***H***, а апофема боковой грани равна ***h***.

Решить самостоятельно, пользуясь интерактивными иллюстрациями.

1.3.17 Равные двугранные углы

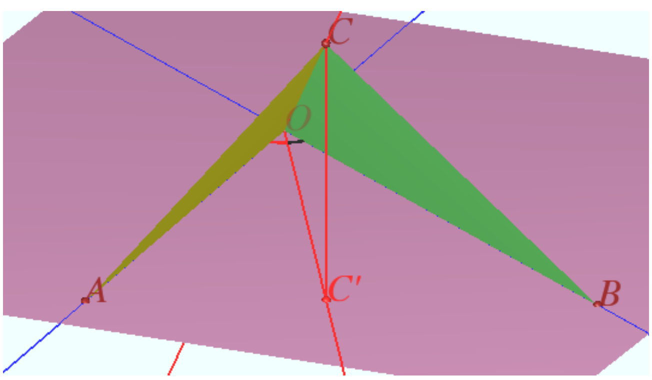
Плоскости *OAC* и *OBC* образуют равные двугранные углы с плоскостью *ABO* ($\cos\varphi = c$), углы в тетраэдре *OABC* при рёбрах *OA* и *OB* острые. Точка *C′* суть проекция *C* на плоскость *OAB*, причем угол *AOB* меньше π. Докажите, что *OC′* - это биссектриса угла *AOB*.

Доказательство. Плоскости пересекаются по прямой *OC*. Опустим из точки *C* перпендикуляры *CA′* на *OA* и *CB′* на *OB*. По теореме о трёх перпендикулярах, проекции тоже перпендикулярны, $C'A' \perp OA$, $C'B' \perp OB$. Отсюда следует равенство прямоугольных треугольников $\Delta A'CC' = \Delta B'CC'$ по общему катету и равному углу (равному двугранному).

Из равенства треугольников следует равенство катетов $A'C' = B'C'$, равенство прямоугольных треугольников, содержащих углы $\angle AOC' = \angle BOC'$.

1.3.17.a Равные двугранные углы

Плоскости *OAD* и *OBD* образуют равные двугранные углы с плоскостью *ABO* ($\cos\varphi = c$). Ровно один из углов в тетраэдре *OABD* при рёбрах *OA* и *OB* острый. Точка *D′* суть проекция *D* на плоскость *OAB*, причем угол *AOB* меньше π. Докажите, что *OD′* - биссектриса дополнительного к *AOB* угла.



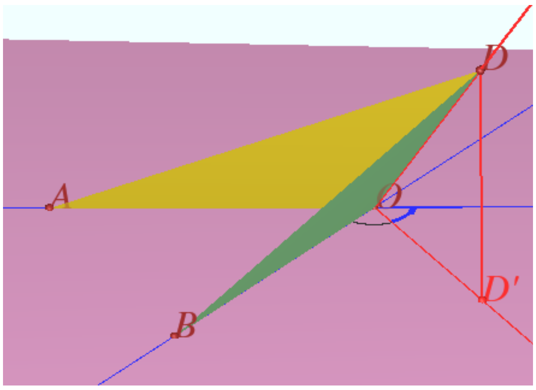


Рис. 15. Равные двугранные углы

1.3.18 Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. 10 – 11 кл.: Учебник. –М.: Дрофа, 2007. – 206 с.

1.7. Двугранный угол между плоскостями.

2. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с.

10.4. Перпендикулярность в пространстве.