Подготовка к ЕГЭ 2014, стереометрия

Интерактивный комплект

1. Виды углов

1.1. Угол между скрещивающимися прямыми

Пособие содержит описание основных понятий, методов расчёта, примеры решения множества задач. Приводятся решения задач на нахождение углов между прямыми в кубе, в треугольной и четырёхугольной пирамиде, в треугольной, четырёхугольной, шестиугольной призме. Прямые углы рассматриваются в основном в пособии «Перпендикулярность в пространстве».

Оглавление раздела

Вход в интерактивные файлы выполняется с помощью щелчка по рисунку. Чтобы рисунки из комплекта ожили, установите на Вашем компьютере программу GInMA с сайта http://deoma-cmd.ru/Products/Geometry/GInMA.aspx **Бесплатная базовая версия** комплекта позволяет ознакомиться с возможностями пособия. Во всех файлах доступны первые шаги решений задач с условием и исходным интерактивным чертежом, в отдельных файлах доступны все шаги решения вплоть до ответа. Для полноценного использования комплекта рекомендуем его купить. **Покупка даст возможность видеть все шаги решения в интерактивном файле и сохранять созданные Вами варианты заданий.**

Основные методы

Используются три основных метода определения угла между прямой и плоскостью:

– одну из прямых заменяем на параллельную ей, пересекающую другую;

– используем различные симметрии;

– используем векторный метод.

Основные понятия

Угол между скрещивающимися прямыми считается равным углу между любыми двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным прямым.

Угол между пересекающимися прямыми – это наименьший из двух углов, образованных этими прямыми. Сумма углов, возникающих при пересечении прямых, равна 180°, поэтому угол между прямыми изменяется от нуля (прямые параллельны) до 90° (прямые перпендикулярны).

Для того, чтобы найти угол между пересекающимися прямыми, достаточно ***провести прямую, параллельную одной из них, через удобную точку другой***, и найти построенный угол.

Корректным считают такое определение, которое не приводит к каким–либо противоречиям. Так определение угла между скрещивающимися прямыми корректно только при условии, что углы между любыми двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным прямым, одинаковы.

Полезные сведения

1. Теорема косинусов. Пусть в некотором треугольнике известны все стороны, которые равны ***a, b*** и ***c***. Требуется найти угол между прямыми, содержащими стороны длины ***a*** и ***b***. По теореме косинусов находим: $\cos\varphi = \dfrac{|c^2 - a^2 - b^2|}{2ab}$. .

Если треугольник равнобедренный, ***a*** = ***b***, то: $\cos\varphi = \left|\dfrac{c^2}{2a^2} - 1\right|$.

2. Векторный метод нахождения угла между прямыми. Пусть в пространстве задан ортонормированный базис, то есть тройка единичных перпендикулярных друг другу (ортогональных) векторов. Пусть известны векторы ***p*** и ***q***, принадлежащие двум прямым. Тогда косинус угла между прямыми можно вычислить, разделив скалярное произведение векторов на произведение их модулей: $\cos\varphi = \dfrac{(p,q)}{|p|\cdot|q|}$. Здесь $(p,q) = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z$, $|p| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$, $|q| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$.

3. Перпендикулярность прямой и плоскости. Пусть даны плоскость ***П*** и прямая ***L***. Если две непараллельные прямые, принадлежащие плоскости ***П,*** перпендикулярны прямой ***L***, то плоскость ***П*** перпендикулярна прямой ***L*** и любая прямая, лежащая в плоскости ***П*** перпендикулярна прямой ***L***.

4. Свойства средней линии треугольника.

Средняя линия треугольника соединяет середины двух его сторон.
Средняя линия параллельна третьей стороне треугольника и равна её половине.

5. Признаки параллелограмма.

Если в четырёхугольнике пары противолежащих сторон параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6. Признаки прямоугольника.

Если в параллелограмме равны диагонали, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Задание 1

Доказательство корректности определения угла между прямыми

Шаг 1. Условие. Докажите, что если через две точки пространства провести по две соответственно параллельные прямые, то углы между этими прямыми равны.

Шаг 2. Пусть через точки ***A*** и ***A'*** пространства проведены по две соответственно параллельные прямые ***AB||A'B'*** и ***AC||A'C'***. Выберем на этих прямых равные отрезки ***AB = A'B'*** и ***AC = A'C'***. Возникли два параллелограмма ***AA'B'B*** и ***AA'C'C***, которые имеют общую сторону.

Шаг 3. В этом случае четырёхугольник ***BB'C'C*** тоже является параллелограммом так как его противоположные стороны равны и параллельны (***BB'=AA'=CC'*** и ***BB'||AA'||CC'***).

Шаг 4. Значит, все стороны треугольников ***ABC*** и ***A'B'C'*** равны. Следовательно, равны и сами треугольники. Значит, углы ***ABC*** и ***A'B'C'*** равны.

В силу произвольного выбора исходных прямых углы между любыми двумя пересекающимися прямыми и другими прямыми, параллельными данным прямым, одинаковы. Это доказывает корректность определения угла между скрещивающимися прямыми.

Угол между скрещивающимися прямыми считается равным углу между любыми двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным прямым, так как все эти углы равны между собой.

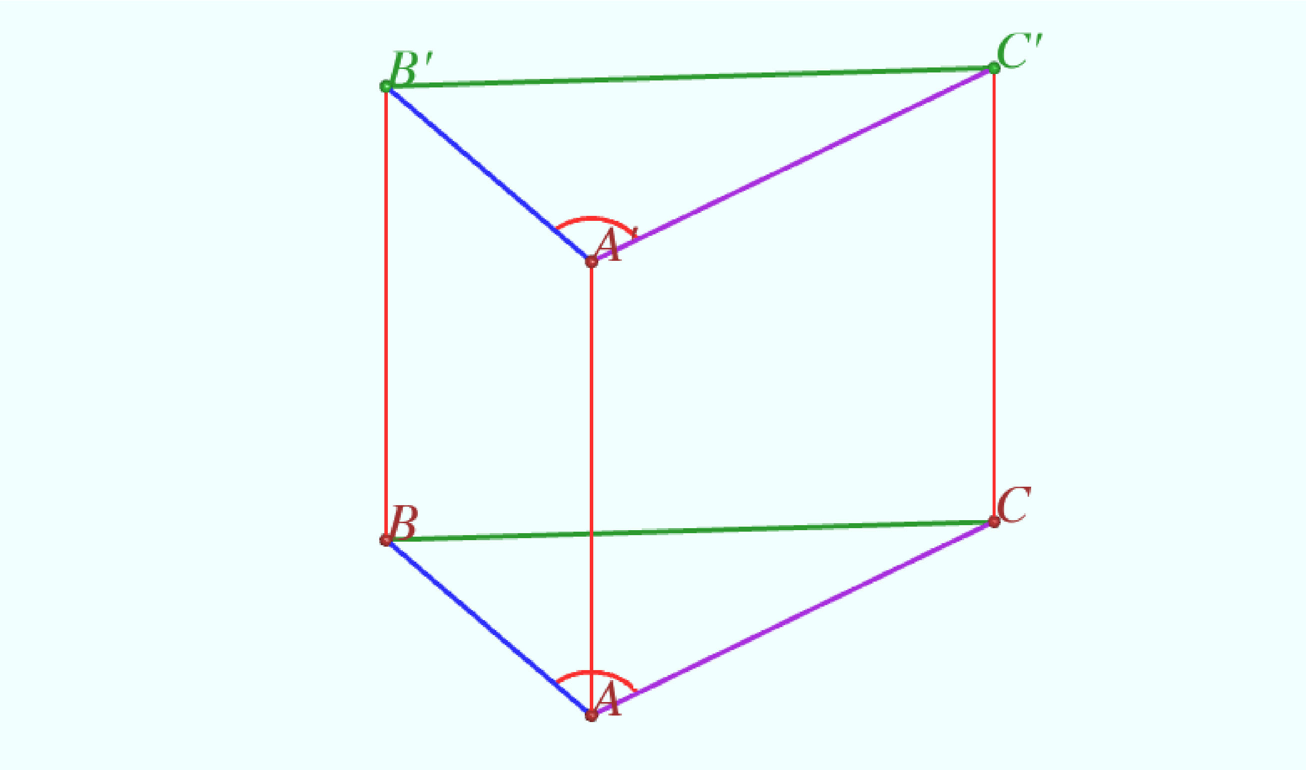

Рис. 1. Доказательство корректности определения угла между прямыми

Задание 2

Шаг 1. Условие. Найдите угол между прямыми, одна из которых проходит через середины рёбер ***AC*** и ***BC*** пирамиды ***ABCD***, а другая – через середины рёбер ***BD*** и ***CD***, если $\angle ABC = \alpha$.

Шаг 2. По теореме о средних линиях для треугольника ***ABC*** ***EF***||***AB***. Аналогично, в треугольнику ***BCD*** ***GH***||***BC***.

Шаг 3. По определению, угол между прямыми ***EF*** и ***GH*** равен углу между прямыми ***AB*** и ***BC***, то есть этот угол равен α, если $\alpha \le 90°$. Иначе этот угол равен $180° - \alpha$.

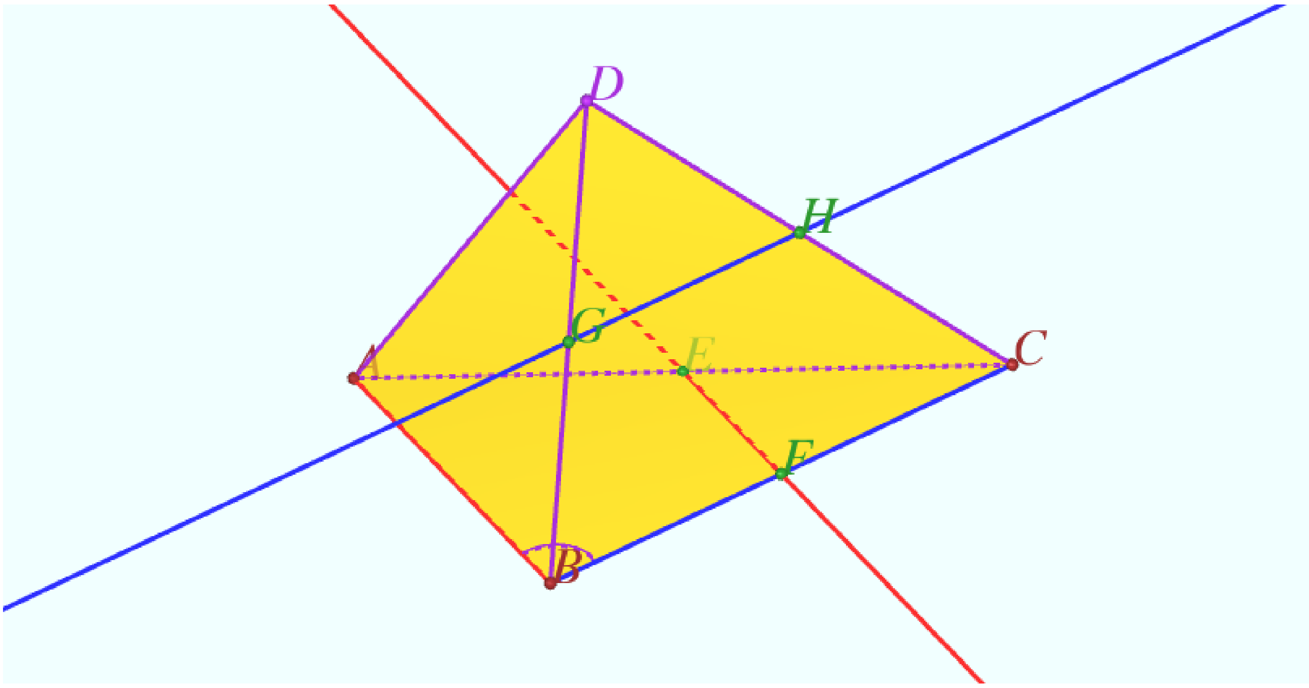

Рис.2. Угол между средними линиями граней тетраэдра

Задание 3

Тетраэдр с равными бимедианами

Шаг 1. Условие. Найдите угол между прямыми ***AC*** и ***BD,*** если расстояние между серединами отрезков ***AB*** и ***CD*** равно расстоянию между серединами отрезков ***BC*** и ***AD***.

Бимедианой (средней линией) тетраэдра называют отрезок, соединяющий середины противоположных (скрещивающихся) рёбер тетраэдра.

Шаг 2. Исследуем четырёхугольник ***EGFH***. Его стороны являются средними линиями треугольников граней. Они параллельны соответствующим ребрам. $EG \parallel AC \parallel FH$, $EH \parallel BD \parallel FG$. Значит, ***EGFH*** – параллелограмм.

Шаг 3. По условию, равны отрезки, являющиеся диагоналями параллелограмма. Значит, это прямоугольник, его соседние стороны перпендикулярны. $FH \perp HE$. Следовательно, $AC \perp BD$ и искомый угол – прямой.

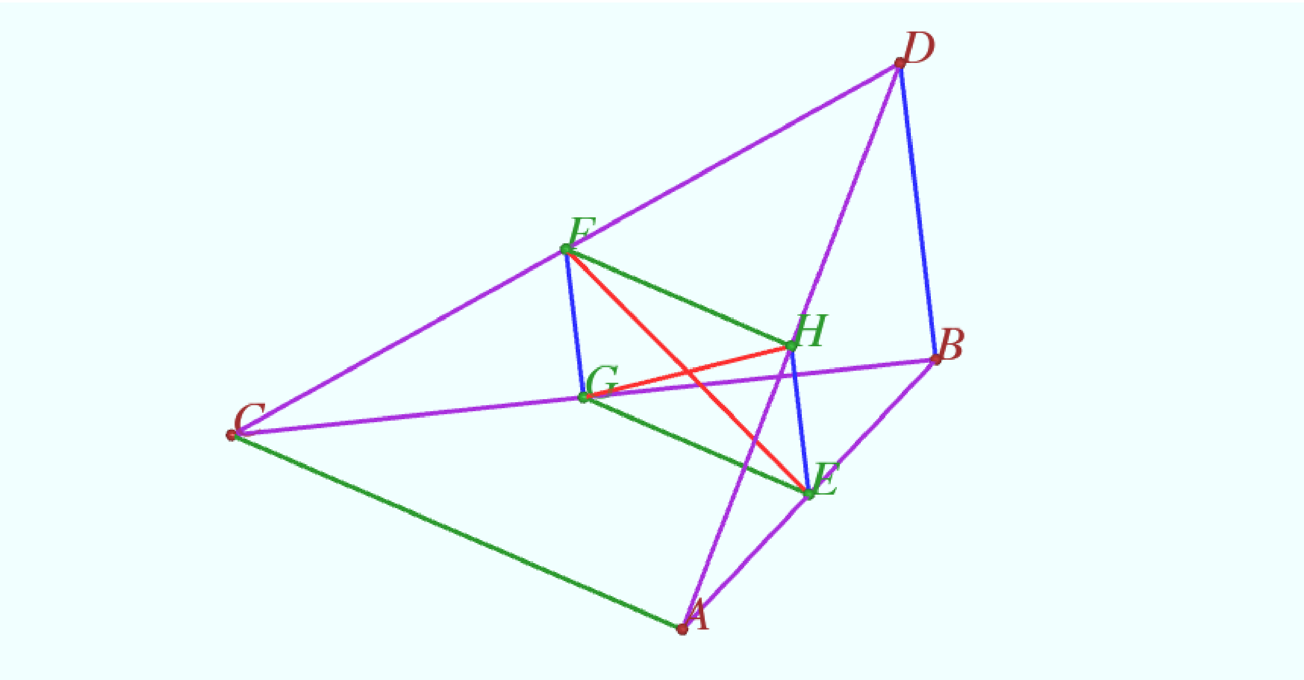

Рис. 3. Угол между рёбрами в тетраэдре с равными бимедианами

Задание 4

Угол между ребрами тетраэдра с известной бимедианой

Шаг 1. Условие. Найдите угол между прямыми ***AC*** и ***BD,*** если $AC = 2a$, $BD = 2b$, а квадрат расстояния между серединами отрезков ***BC*** и ***AD*** равен $EF^2 = a^2 + b^2 + ab$.

Шаг 2. Пусть ***G*** – середина ***AB***. Тогда $EG = a$, $FG = b$, $EF^2 = a^2 + b^2 + ab$.

Шаг 3. По формуле для косинуса угла ***EGF*** $\cos\varphi = \dfrac{|c^2 - a^2 - b^2|}{2ab}$, он равен 0,5, $\angle EGF = 60°$. Этот угол равен углу между ***AC*** и ***BD.***

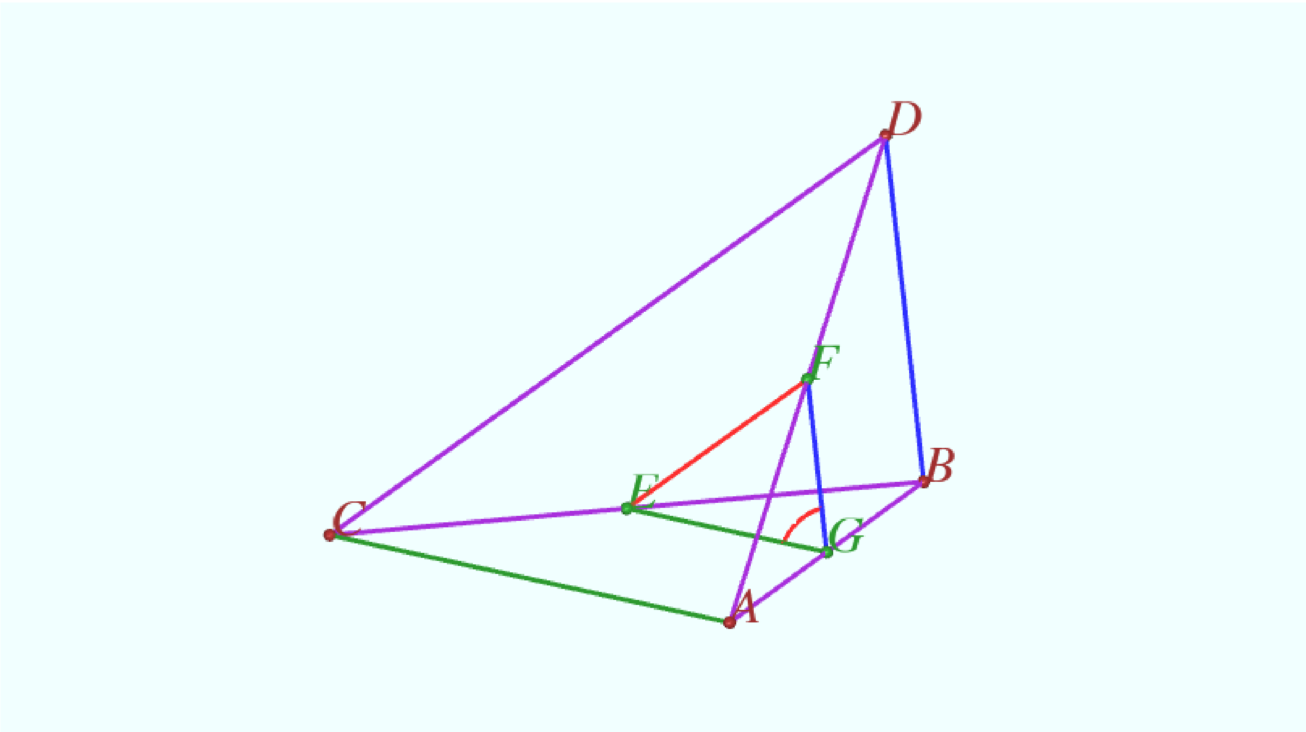

Рис. 4. Угол между ребрами тетраэдра с известной бимедианой

Задание 5

Угол между медианами граней правильного тетраэдра

Найдите величину угла между скрещивающимися медианами граней правильного тетраэдра.

Шаг 1. Условие. Найдите величину угла между медианами ***CE*** и ***DF*** граней ***ABC*** и ***BCD*** правильного тетраэдра ***ABCD.***

Шаг 2. Находим угол между медианами ***CE*** и ***DF*** граней ***ABC*** и ***BCD***. Построим ***FG*** – среднюю линию треугольника ***BCE***. Так как $FG \| CE$, то $\angle DFG$ – искомый.

Шаг 3. В треугольнике ***DFG*** находим стороны. Пусть $CE = DE = DF = h$. Тогда $FG = h/2$. $DG^2 = DE^2 + CE^2 = 13h^2/12$. По теореме косинусов $DF^2 + FG^2 - 2DF \cdot FG \cos\varphi = DG^2$.

Значит, $\cos\varphi = \dfrac{1}{6}$. Решена ли задача?

Предложите ученикам закончить решение дома самостоятельно.

Шаг 4. Находим угол между медианами ***CE*** и ***BH*** граней ***ABC*** и ***BCD***.

Шаг 5. Построим ***HI*** – среднюю линию треугольника ***CDE***. Так как $HI \| CE$, то $\angle BHI$ – искомый. В треугольнике ***BHI*** находим стороны. $IH = h/2$; $BI^2 = BE^2 + IE^2 = 7h^2/12$. По теореме косинусов:

$HI^2 + BH^2 - 2BH\, HI \cos\varphi = BI^2$. $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$.

Проверьте, что угол между произвольно выбранной медианой ***CE*** и любой другой медианой равен одному из найденных.

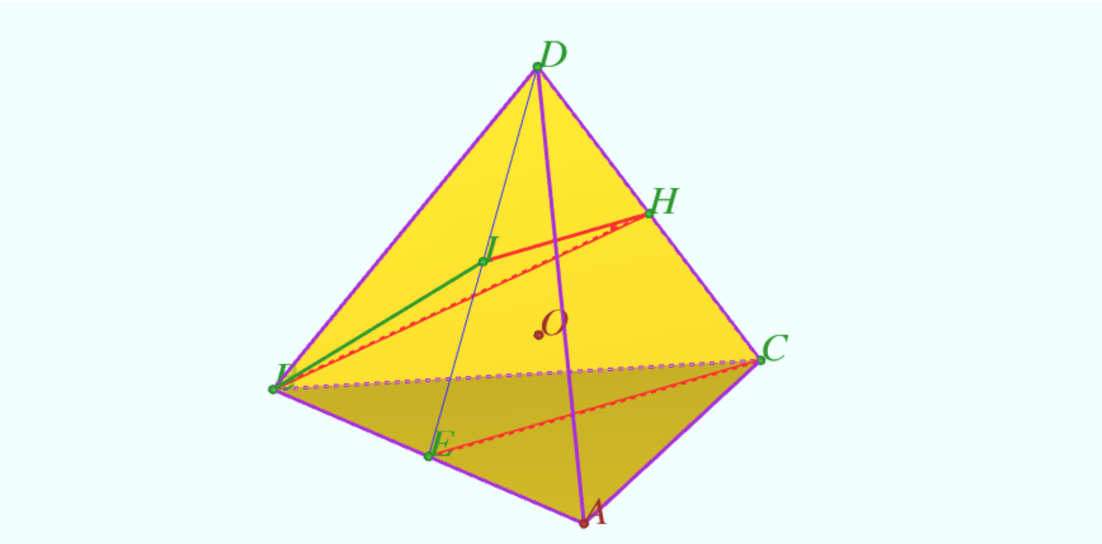

Рис. 5. Угол между медианами граней правильного тетраэдра

Задание 6

Угол между диагоналями граней куба

Шаг 1. Задание. Найдите угол между диагоналями ***BA'*** и ***AD'*** граней куба ***ABCDA'B'C'D'***.

Шаг 2. Решение 1. Диагональ ***BC'*** грани ***BB'C'C*** параллельна диагонали ***AD'***, значит ***∠A'BC'*** искомый.

Шаг 3. Треугольник ***A'BC'*** образуют три равных диагонали куба, значит, он равносторонний. Ясно, что ***∠A'BC'*** = 60°.

Шаг 4. Решение 2. Введём систему координат с началом в точке ***A***, единицей равной длине ребра куба, осями ***x*** вдоль ***AD, y*** вдоль ***AB, z*** вдоль ***AA'***. Тогда вершины куба имеют такие координаты ***A***(0,0,0); ***D'***(1,0,1); ***B***(0,1,0); ***A'***(0,0,1). Векторы находим по разности координат $\overrightarrow{AD'}=\vec{D}'-\vec{A}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{BA'}=\vec{A}'-\vec{B}=(0,-1,1)$.

Шаг 4. $\cos\varphi = \dfrac{(AD', BA')}{|AD'|\cdot|BA'|} = \dfrac{1\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$, φ = 60°.

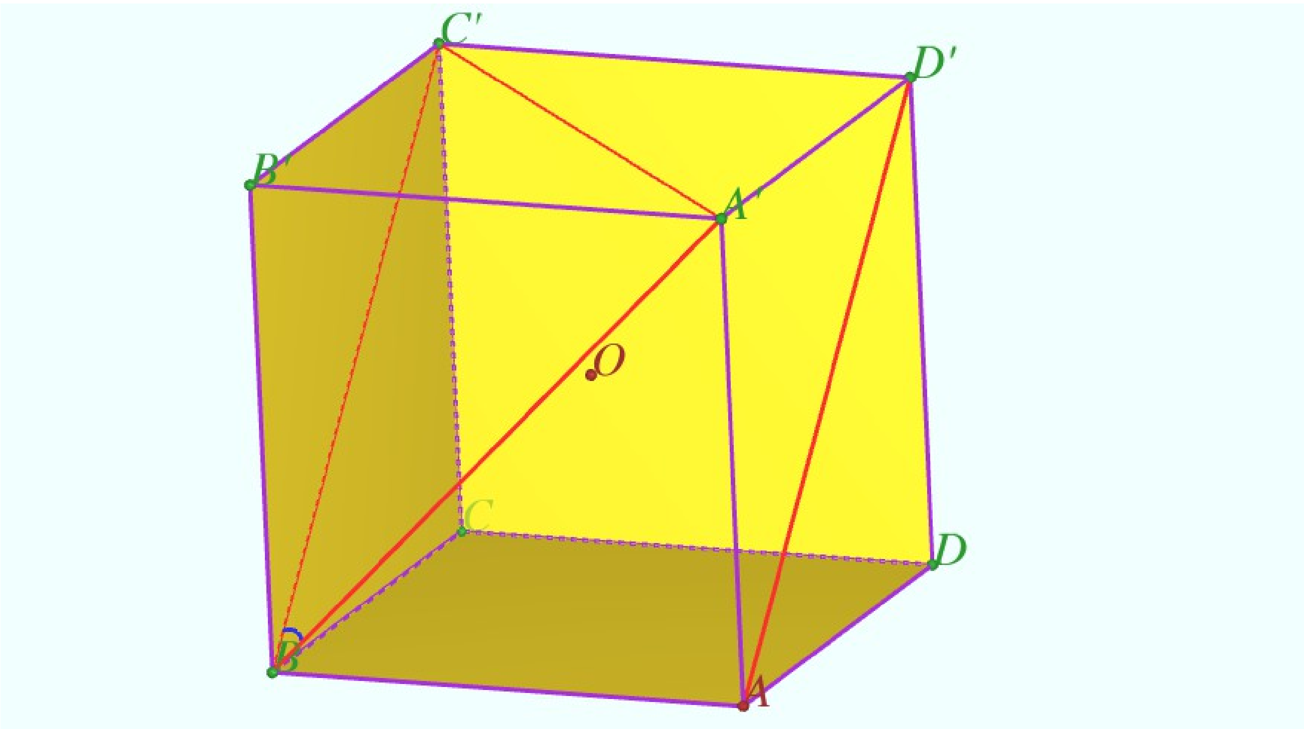

Рис. 6. Угол между диагоналями граней куба

Задание 7

Угол между диагональю куба и диагональю его грани

Шаг 1. Задание. Найдите угол между диагональю ***AC′*** куба ***ABCDA′B′C′D′*** и диагональю ***BD*** грани ***ABCD***.

Шаг 2. Решение 1. Пусть точка ***E*** симметрична ***C*** относительно ***B.*** Тогда ***BE||AD, BE = AD, ADBE*** параллелограмм***, AE||BD, AE = BD.*** По определению, ∠***EAC′*** – искомый.

Шаг 3. Находим стороны треугольника ***EAC′***. $C'E^2 = CC'^2 + CE^2 = 5AB^2$, $AE^2 = 2AB^2$, $AC'^2 = 3AB^2$. Значит $C'E^2 = AE^2 + AC'^2$, и искомый угол – прямой.

Шаг 4. Решение 2. Введём систему координат с началом в точке ***A***, осями ***x*** вдоль ***AD, y*** вдоль ***AB, z*** вдоль ***AA′***. Пусть $|AB| = 1$. Тогда точки имеют такие координаты ***A***(0,0,0); ***A′***(0,0,1), B(1, 0,0), D(0,1,0). C'(1,1,1), ***BD*** = D–B = (–1,1,0).

Шаг 5. AC′ = (1,1,1). Скалярное произведение $BD \cdot AC' = 0$, следовательно, ***BD*** перпендикулярно ***AC′***.

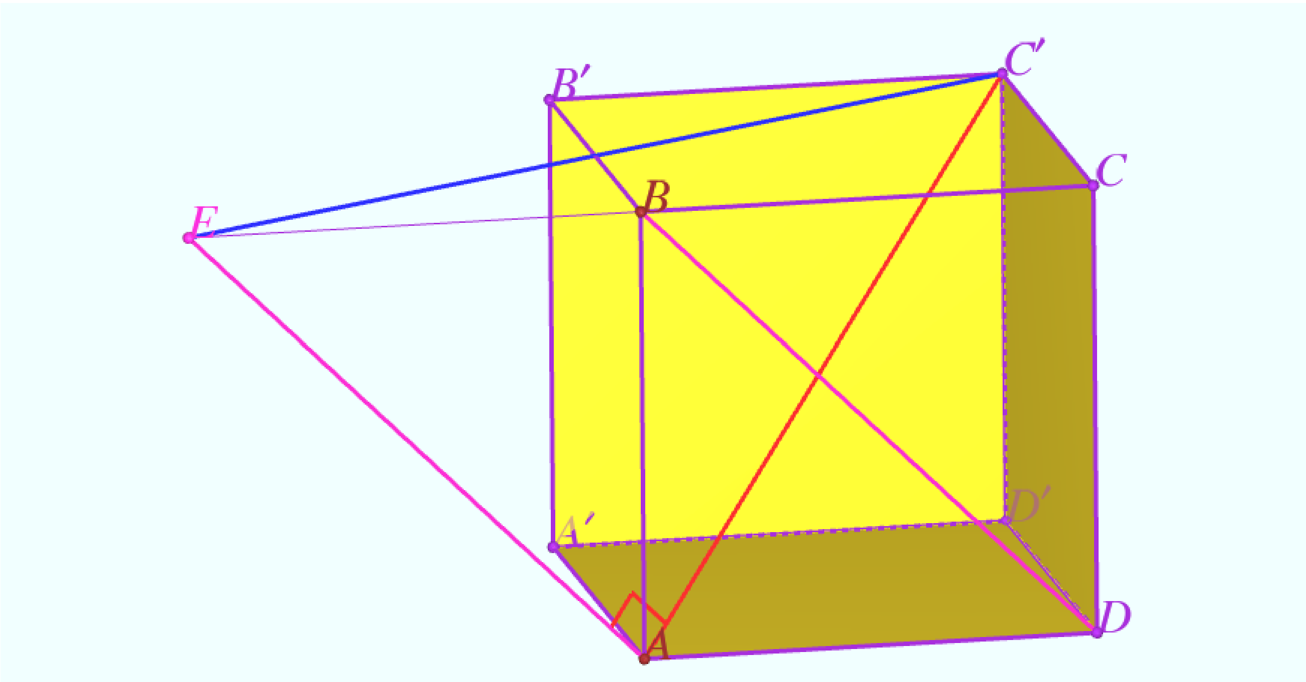

Рис. 7. Угол между диагоналями куба и его грани

Задание 8

Угол между «медианами» граней куба

Найдите угол между не пересекающимися медианами соседних граней куба.

Шаг 1. Задание. В кубе ***ABCDA'B'C'D'*** найдите угол между ***AF*** и ***BE***, где ***E*** – середина ***A'B'***, ***F*** – середина ***A'D'***.

Решение записано в интерактивном файле.

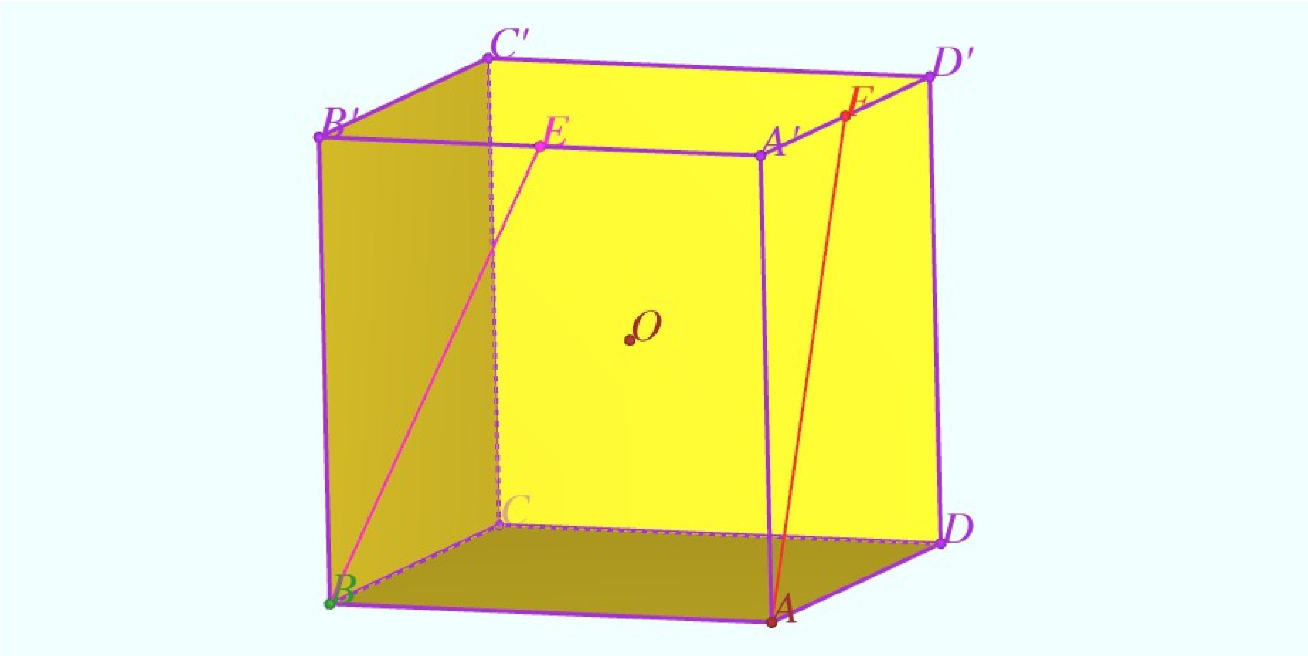

Рис 8. Угол между «медианами» граней куба

Задание

Угол между «медианами» куба

Шаг 1. Задание. В кубе ***ABCDA'B'C'D'*** найдите угол между ***AF*** и ***BE***, где ***E*** – середина ***A'B', F*** – середина ***C'D'.***

Решение записано в интерактивном файле.

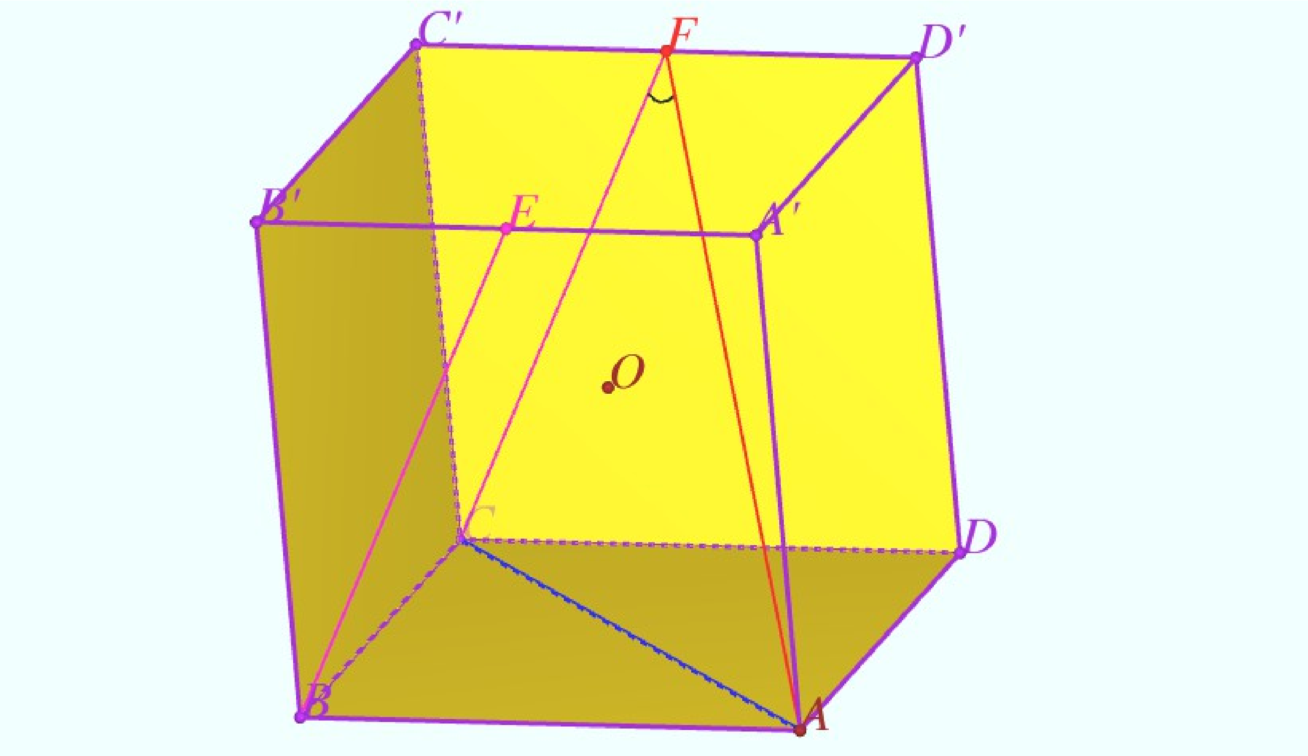

Рис. 9. Угол между «медианами» куба

Задание 10

Угол между диагоналями граней прямоугольного параллелепипеда

Шаг 1. Задание. Найдите угол между диагоналями ***BA'*** и ***AD'*** граней прямоугольного параллелепипеда ***ABCDA'B'C'D'***, если эти диагонали образуют с плоскостью основания углы, равные α и β.

Шаг 2. Решение 1. Диагональ ***BC'*** грани ***BB'C'C*** параллельна диагонали ***AD'***, значит $\angle A'BC'$ искомый. Пусть $AA' = 1$. Тогда из прямоугольных треугольников $AD = ctg\alpha$, $AB = ctg\,\beta$.

Шаг 3. Диагональ ***AC*** найдём по теореме Пифагора: $AC^2 = ctg^2\,\alpha + ctg^2\,\beta$. $AD' = \frac{1}{\sin\alpha}$, $A'B = CD' = \frac{1}{\sin\beta}$. $\cos\varphi = (AC^2 - AD'^2 - CD'^2)/(2AD' \cdot BA')$. Значит,

$$\cos\varphi = \sin\alpha \cdot \sin\beta .$$

Шаг 4. Решение 2. Введём систему координат с началом в точке ***A***, осями ***x*** вдоль ***AD, y*** вдоль ***AB, z*** вдоль ***AA'***. Пусть $|AA'| = 1$. Тогда точки имеют такие координаты $A(0,0,0)$, $A'(0,0,1)$, $B(ctg\alpha, 0,0)$, $D'(0,ctg\beta,1)$.

Векторы находим по разности координат $\overrightarrow{AD'} = \vec{D}' - \vec{A} = (0, ctg\,\beta, 1)$, $\overrightarrow{BA'} = \vec{A}' - \vec{B} = (-ctg\,\alpha, 0, 1)$.

$$\cos\varphi = \frac{(AD', BA')}{|AD'| \cdot |BA'|} = \frac{ctg\alpha \cdot 0 + 0 \cdot (-ctg\beta) + 1 \cdot 1}{\frac{1}{\sin\beta} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}} = \sin\alpha \, \sin\beta .$$

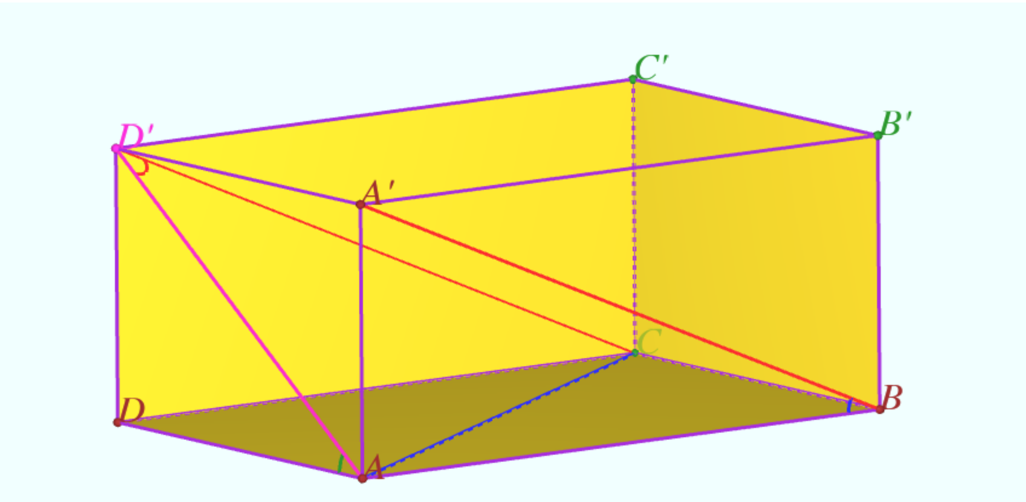

Рис. 10. Угол между диагоналями граней прямоугольного параллелепипеда

Задание 11

Угол между диагоналями граней прямой призмы

Шаг 1. Задание. Найдите угол между диагоналями ***BA'*** и ***AD'*** граней прямой призмы ***ABCDA'B'C'D'***, если эти диагонали образуют с плоскостью основания углы, равные α и β, а основанием призмы является параллелограмм с острым углом $\angle ADC = \gamma$.

Шаг 2. Решение 1. Диагональ ***BC'*** грани ***BB'C'C*** параллельна диагонали ***AD'***, значит, $\angle A'BC'$ искомый. Пусть $AA' = 1$. Грань ***BB'C'C*** – это параллелограмм со сторонами $ctg\,\alpha$ и $ctg\,\beta$, углом $\angle ADC = \gamma$.

Шаг 3. Диагональ ***A'C'*** = ***AC*** соединяет тупые углы и равна $A'C' = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2\,ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta \cdot \cos\gamma}$. Треугольник ***A'BC'*** образуют диагонали параллелепипеда, равные $\frac{1}{\sin\alpha}, \frac{1}{\sin\beta}, \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2\,ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta \cdot \cos\gamma}$. Значит,

$$\cos\varphi = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma.$$

Шаг 4. Решение 2. Введём систему координат с началом в точке ***A***, осями ***x*** вдоль ***AB***, ***z*** вдоль ***AA'***. Пусть $|AA'| = 1$. Тогда точки имеют координаты:

$$A(0,0,0),\ A'(0,0,1),\ B(ctg\alpha,\ 0,0),\ D'(-ctg\,\beta\,\cos\gamma, ctg\,\beta\,\sin\gamma, 1).$$

Векторы находим по разности координат $\overrightarrow{AD'} = \vec{D}' - \vec{A} = (-ctg\,\beta\cos\gamma, ctg\,\beta\sin\gamma, 1)$. $\overrightarrow{BA'} = A' - B = (-ctg\,\alpha, 0, 1)$.

Шаг 5. $\cos\varphi = \frac{(AD', BA')}{|AD'|\cdot|BA'|} = \frac{(-ctg\,\alpha)\cdot(-ctg\,\beta\cos\gamma) + 0\cdot ctg\,\beta\sin\gamma + 1\cdot 1}{\frac{1}{\sin\beta}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}}¿,$

$$\cos\varphi = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

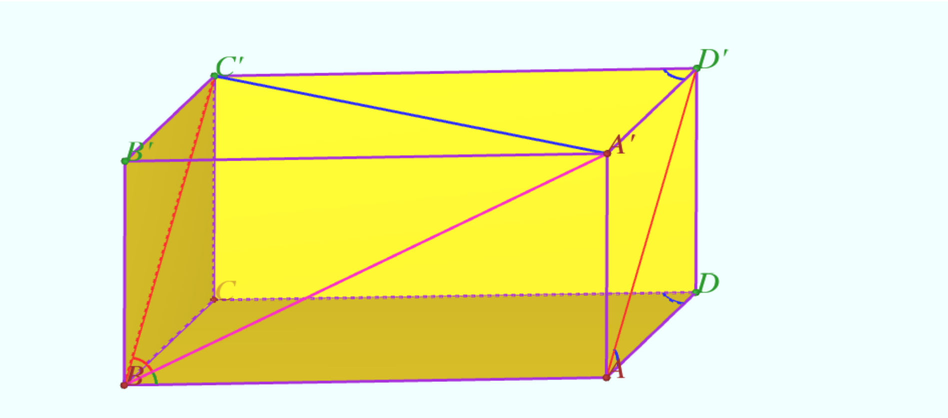

Рис. 11. Угол между диагоналями граней прямой призмы

Задание 12

Угол между диагоналями граней правильной треугольной призмы

Шаг 1. Задание. Найдите угол между диагоналями ***AB'*** и ***BC'*** граней правильной призмы ***ABCA'B'C'***, если отношение квадрата длины ребра призмы к квадрату её высоты равно ***k***.

Шаг 2. Построим точку ***D*** симметрично ***C*** относительно ***C'***. Возник параллелограмм ***BB'DC'***, так как ***BB' = DC', BB'||DC'***. Противоположные стороны параллелограмма параллельны, ***BC'||DB'***. Значит, $\angle$***AB'D*** искомый.

Шаг 3. Треугольник ***AB'D*** равнобедренный (***AB' = B'D***). В правильной призме боковые рёбра перпендикулярны основанию, значит, $B'A^2 = AB^2 + B'B^2 = (k+1)A'A^2$. Аналогично, $AD^2 = AB^2 + (2CC')^2 = (k+4)A'A^2$. По теореме косинусов, получаем $\cos\varphi = \dfrac{|1-0,5k|}{1+k}$.

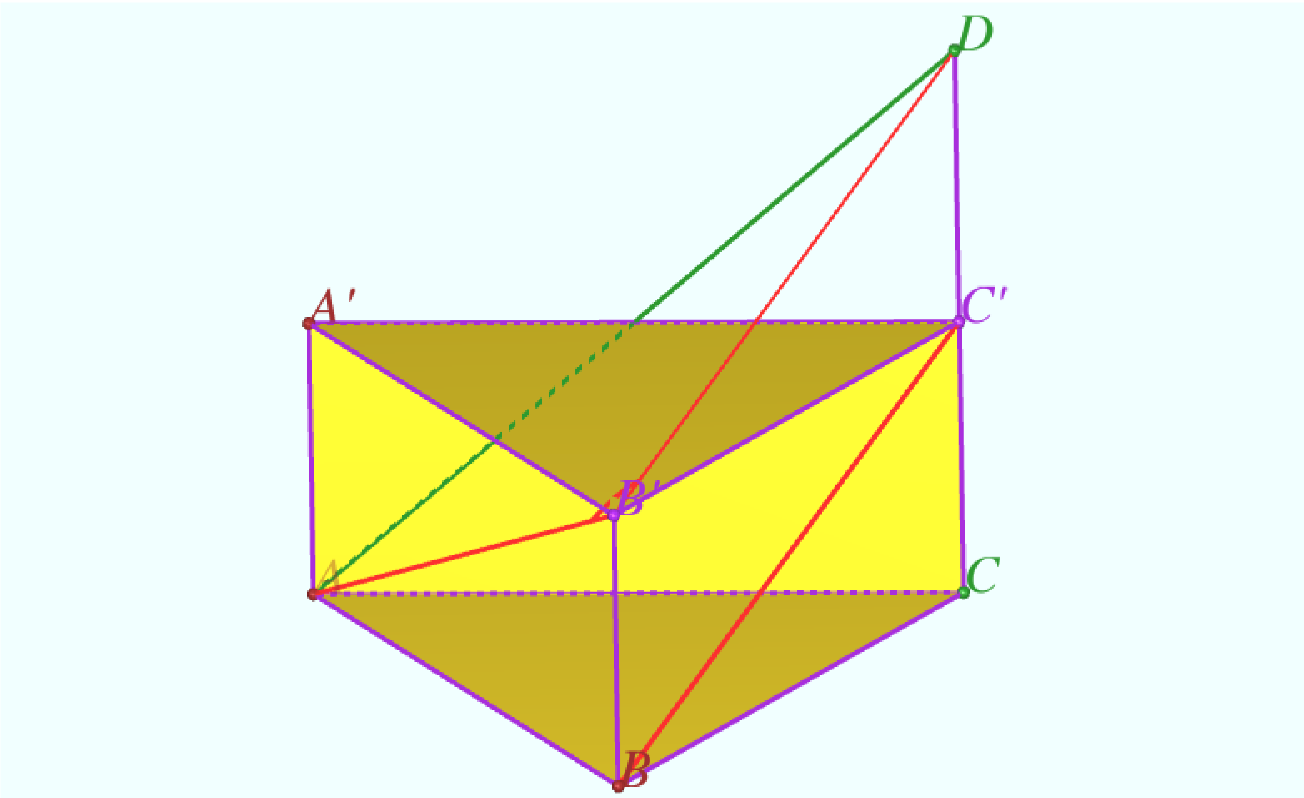

Рис. 12. Угол между диагоналями граней правильной треугольной призмы

Задание 13

Угол в правильной треугольной призме

Шаг 1. Задание. В правильной призме ***ABCA'B'C' AA' = k AB***. Точка ***E*** – середина ребра ***A'B'***, точка ***F*** – середина ребра ***B'C'***. Найдите угол между ***AE*** и ***BF***.

Шаг 2. Построим точку ***D*** на середине ***AC***. Возник параллелограмм ***ADFE***, так как ***AD = FE, AD||FE***. Противоположные стороны параллелограмма параллельны, ***AE||DF***. Значит $\angle BFD$ искомый.

Шаг 3. Пусть ***AD = 1. Тогда*** $AB = 2$, $AA' = 2k$, $AE^2 = A'A^2 + A'E^2 = 4k^2 + 1$, $BD^2 = 3$.

Треугольник ***BFD*** равнобедренный, ***AE = BF = DF***. По теореме косинусов, получаем

$$\cos\varphi = \left|\frac{BD^2}{2\,AE^2} - 1\right| = \frac{|8k^2 - 1|}{8k^2 + 2}..$$

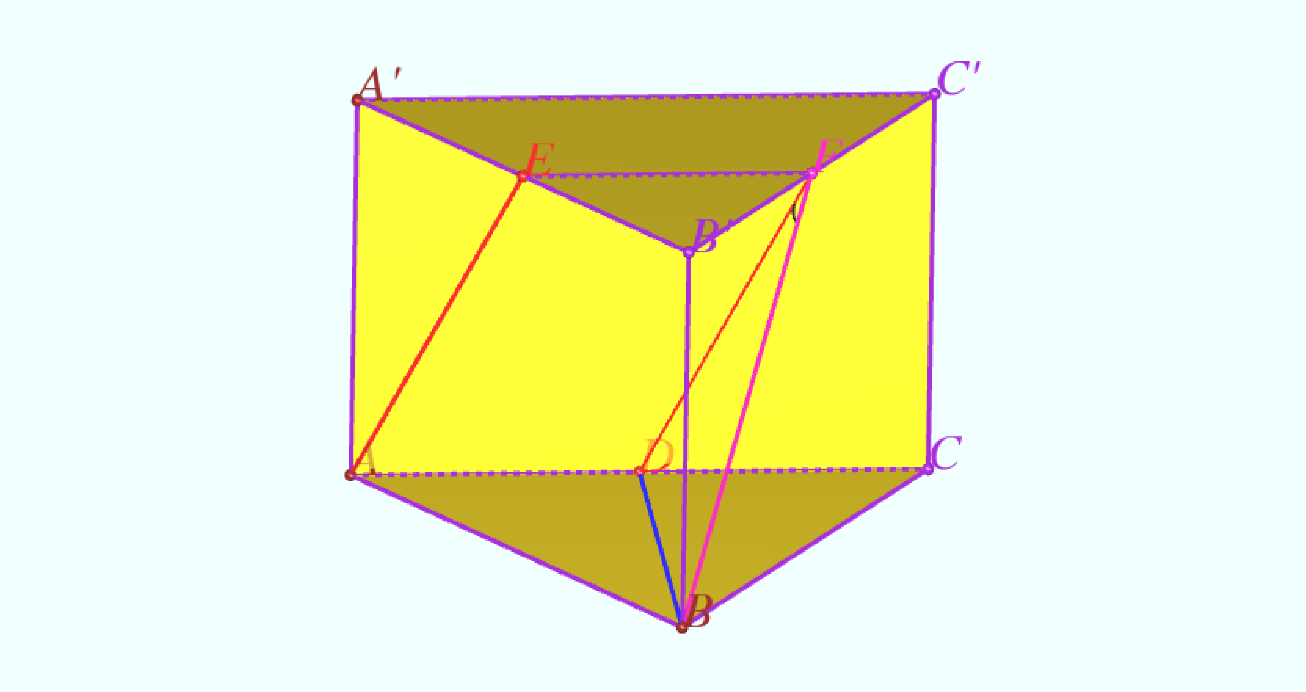

Рис. 13. Угол в правильной треугольной призме

Задание 14

Угол между диагональю грани и медианой в правильной треугольной призме

Шаг 1. Задание. В правильной призме ***ABCA'B'C'*** ***AA' = k AB.*** Точка ***E*** – середина ***A'B'***. Найдите угол между ***AE*** и ***BC'***.

Шаг 2. Из точки ***A*** в плоскости ***ABC*** строим отрезок ***AD*** перпендикулярный ***AB*** и равный ***C'E***. Так как ***C'E*** медиана и высота треугольника ***A'B'C'***, то ***AD||EC'***. Значит, ***ADC'E*** параллелограмм. Противоположные стороны параллелограмма параллельны, то есть ***AE||DC'***. Значит ***∠BC'D*** искомый.

Шаг 3. Пусть ***AB = 2.*** Тогда ***AA' = 2k***. Стороны треугольника ***BC'D*** находим по теореме Пифагора: $CD = 1$, $AD^2 = 3$, $BD^2 = 3 + 4 = 7$, $C'B^2 = 4 + 4k^2$, $C'D^2 = 1 + 4k^2$.

По теореме косинусов, получаем

$$\cos\varphi = \frac{|BD^2 - BC'^2 - C'D^2|}{2\,BC'\cdot C'D} = \frac{|4k^2-1|}{2\sqrt{(k^2+1)(4k^2+1)}}..$$

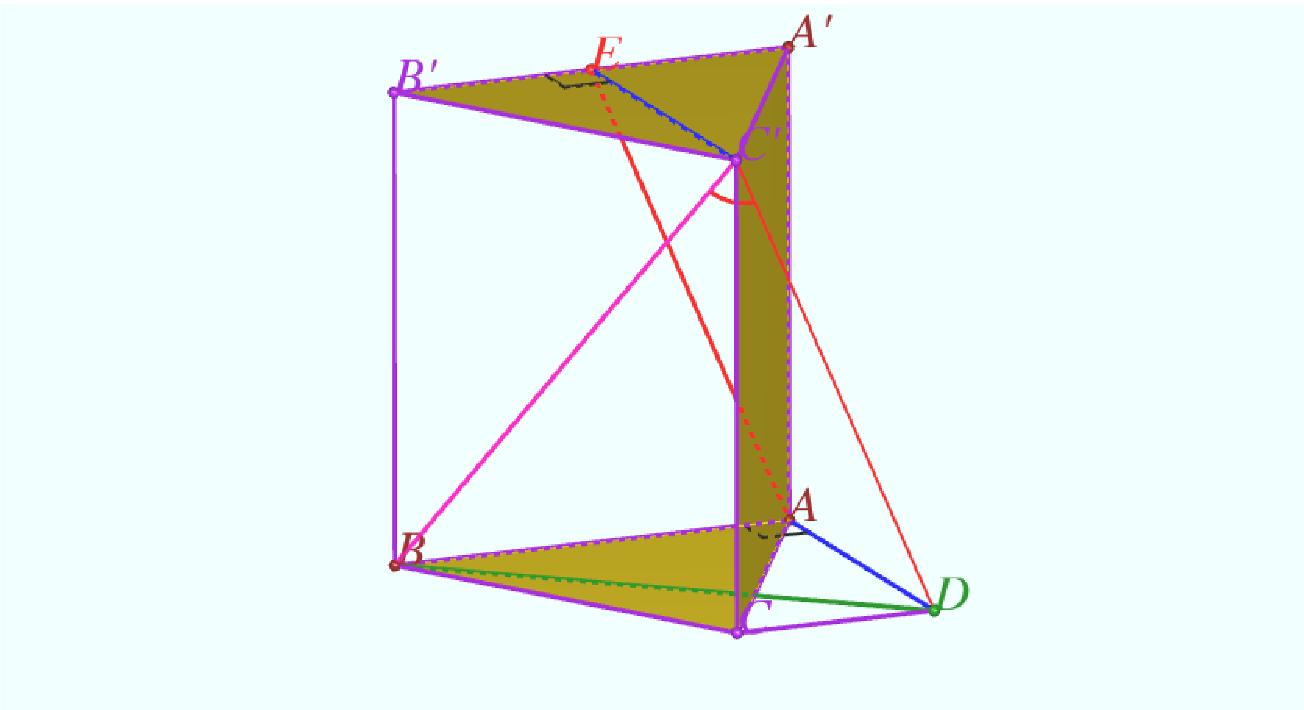

Рис. 14. Угол в правильной треугольной призме

Задание 15

Угол между медианами правильной шестиугольной призмы

Шаг 1. Задание. В правильной шестиугольной призме ***ABCDEFA'B'C'D'E'F'***, ***AA' = kAB, H*** – середина ***B'C', G*** – середина ***A'B'***. Найдите угол между прямыми ***AG*** и ***BH***.

Шаг 2. Создаём угол, равный искомому. Пусть точка ***G'*** находится на продолжении ***A'B'*** так, что ***GG' = AB***. Тогда ***GG||AB***. Возник параллелограмм ***AGG'B***. Противоположные стороны параллелограмма параллельны, ***AG||BG'***. Значит ***∠HBG'*** равен искомому.

Шаг 3. Так как ***∠HB'G' = 60°*** и ***B'G = B'H*** получаем, что ***B'HG'*** – правильный треугольник. Если ***AB = 2***, то ***B'H = 1***. По теореме Пифагора, $BH^2 = B'B^2 + BH^2 = 4k^2 + 1$,

$$\cos\varphi = \left|\frac{B'H^2}{2BH^2} - 1\right| = \frac{8k^2+1}{8k^2+2}.$$

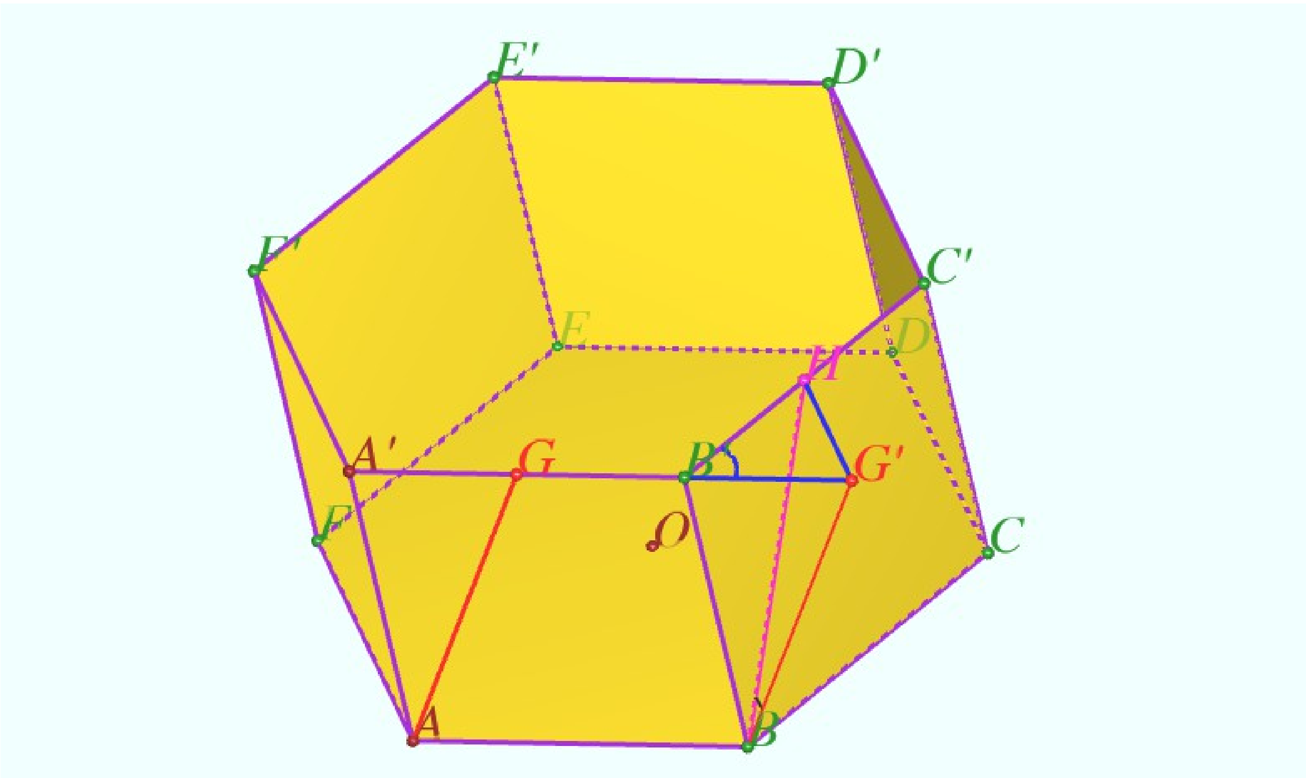

Рис. 15. Угол между медианами правильной шестиугольной призмы

Задание 16

Угол между противолежащими рёбрами правильной треугольной пирамиды

Шаг 1. Задание. Найдите углы между противолежащими рёбрами правильной треугольной пирамиды $ABCD$.

Шаг 2. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ проекция вершины D на плоскость основания – это центр основания E. Заметим, что $CE \perp AB$.

Шаг 3. Пусть точка F симметрична B относительно AC. Поскольку $AF = BC = AB = CF$, то $ABCF$ – ромб, причём точка E лежит на его диагонали BF.

Шаг 4. Поскольку $CF \| AB$ то $CE \perp CF$. По теореме Пифагора $CF^2 = FE^2 - CE^2$.

Шаг 5.По этой же теореме, $DF^2 - CD^2 = (DF^2 - DE^2) - (CD^2 - DE^2) = FE^2 - CE^2 = CF^2$.

Шаг 6. По теореме, обратной теореме Пифагора, $CD \perp BF$, $CD \perp AB$, искомый угол прямой.

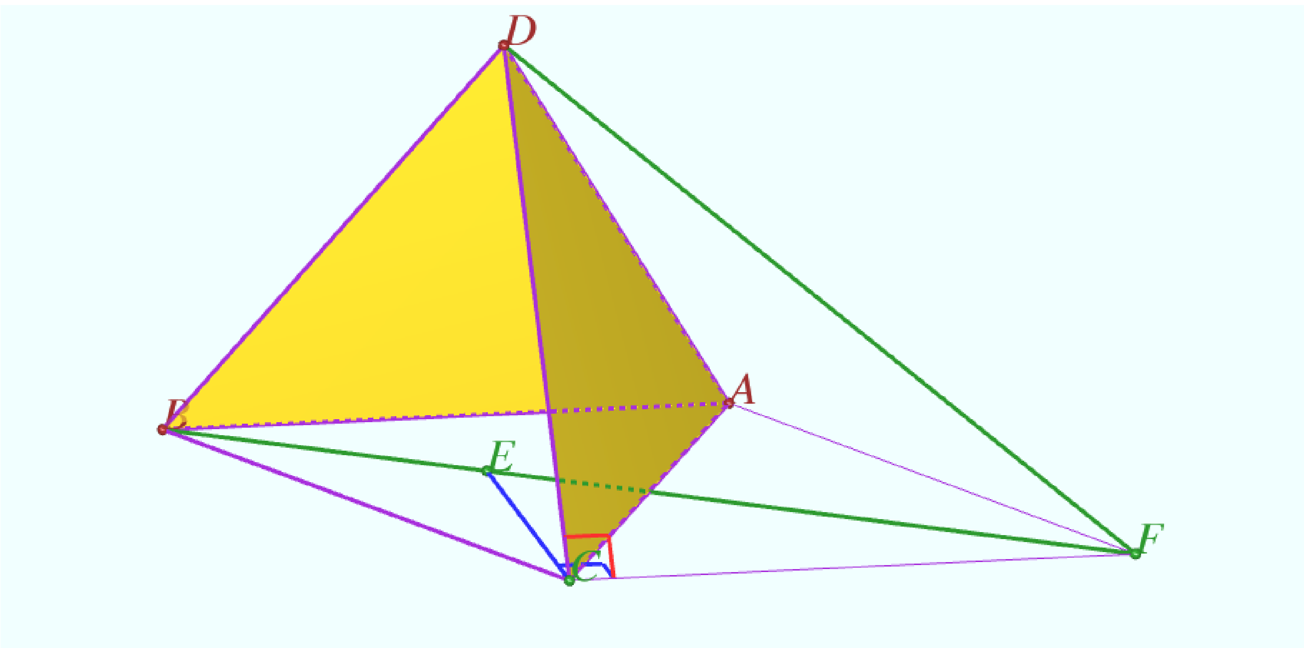

Рис. 16. Угол между противолежащими рёбрами правильной пирамиды

Задание 17

Тетраэдр с перпендикулярными рёбрами

Шаг 1. Задание. Дан тетраэдр ***ABCD***, у которого равны две пары рёбер ***AC* = *BC*, *AD* = *BD***. Докажите, что ***AB*⊥*CD***.

Обсуждение. В ходе обсуждения желательно заметить пару равнобедренных треугольников и вспомнить свойство высоты–медианы в этих треугольниках. Исследуем плоскость ***CMD*** (***M*** – середина ***AB***). В плоскости ***ABC*** устанавливаем, что ***CM*⊥*AB.*** В плоскости ***ABD*** устанавливаем, что ***DM*⊥*AB.*** Отсюда вывод, что плоскость ***CMD*** перпендикулярна ***AB.*** И, наконец, отмечаем, что одна из прямых этой плоскости, ***CD,*** перпендикулярна ***AB***.

Шаг 2. Решение. Пусть ***M*** – середина ***AB***. В треугольнике ***ABC*** медиана ***CM*** это высота, ***CM*⊥*AB.*** В треугольнике ***ABD*** медиана ***DM*** это высота, ***DM*⊥*AB.*** Значит, плоскость ***CMD*** перпендикулярна ***AB. CD*** это одна из прямых этой плоскости ***CMD.*** Она перпендикулярна ***AB***.

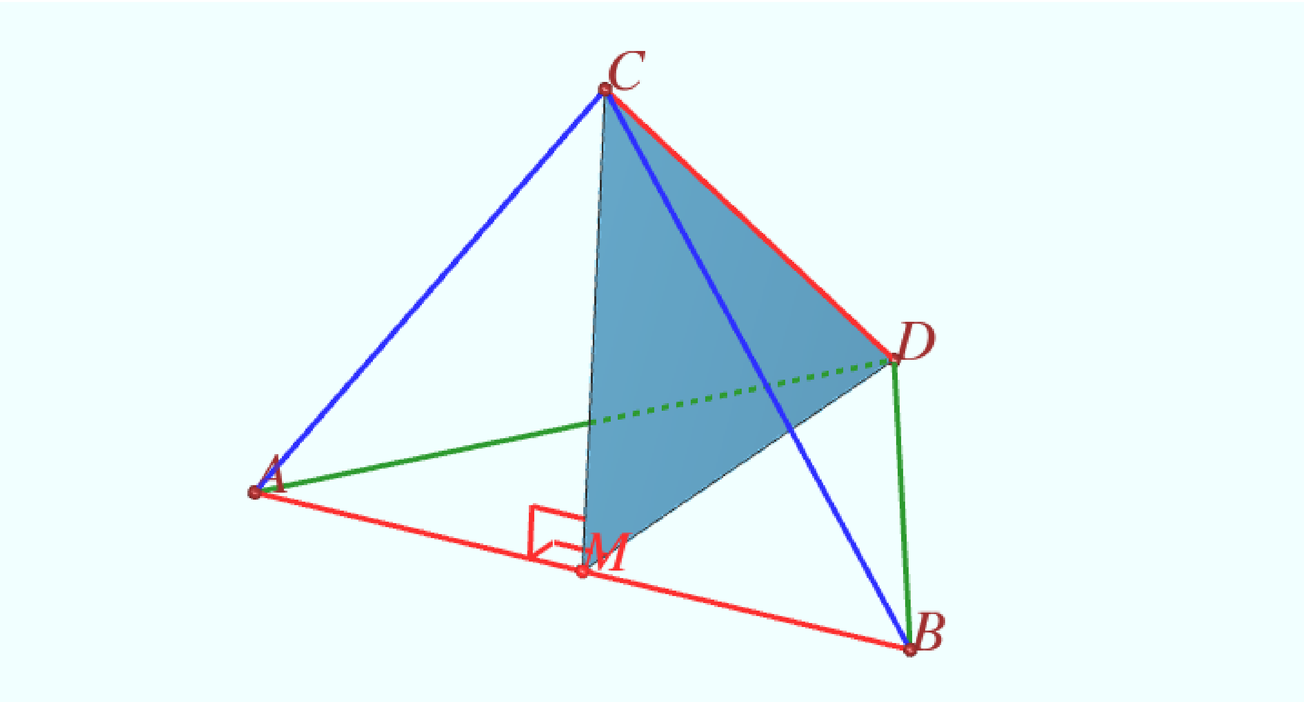

Рис. 17. Тетраэдр с перпендикулярными рёбрами

Задание 18

Равные углы между прямой и рёбрами трёхгранного угла

Шаг 1. Задание. Через вершину трёхгранного угла, все плоские углы которого равны 2α, проведена прямая, образующая равные углы с рёбрами трёхгранного угла. Найдите эти углы.

Шаг 2. На рисунке вершиной трёхгранного угла является ***D***. Заданный угол - это $\angle ADB = 2\alpha$, искомый угол это $\angle ADE = \varphi$.

Шаг 3. Решение. Чтобы «связать» углы, строим пирамиду с вершиной ***D***. Для этого через точку ***E*** прямой ***ED*** проводим перпендикулярную ***ED*** плоскость.

Из равенства по катету и углу треугольников ***ADE, BDE*** и ***CDE*** находим: $AE = BE = CE$, $AD = BD = CD$.

Из равенства по двум сторонам и углу треугольников ***ADB, BDC*** и ***CDA*** находим: $AB = BC = AC$.

Шаг 4. В правильной треугольной пирамиде ***ABCD*** проекция вершины ***D*** на плоскость основания – это центр основания ***ABC*** точка ***E***. Напомним, что $CE \perp DE$. Пусть $AD = b$. Выразим ***AB*** и ***CE*** через углы α и φ. $CE = b\sin\varphi$, $AB = 2b\sin\varphi$. В правильном треугольнике ***ABC*** $AB = CE\sqrt{3}$.

Шаг 5. Выполним преобразования $2b\sin\alpha = b\sqrt{3}\sin\varphi$, $\sin\varphi = \dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}}$, $\varphi = \arcsin\dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}}$.
Заметим, что для трёхгранного угла ***DABC*** прямая ***DE*** является осью описанного и вписанного конусов.

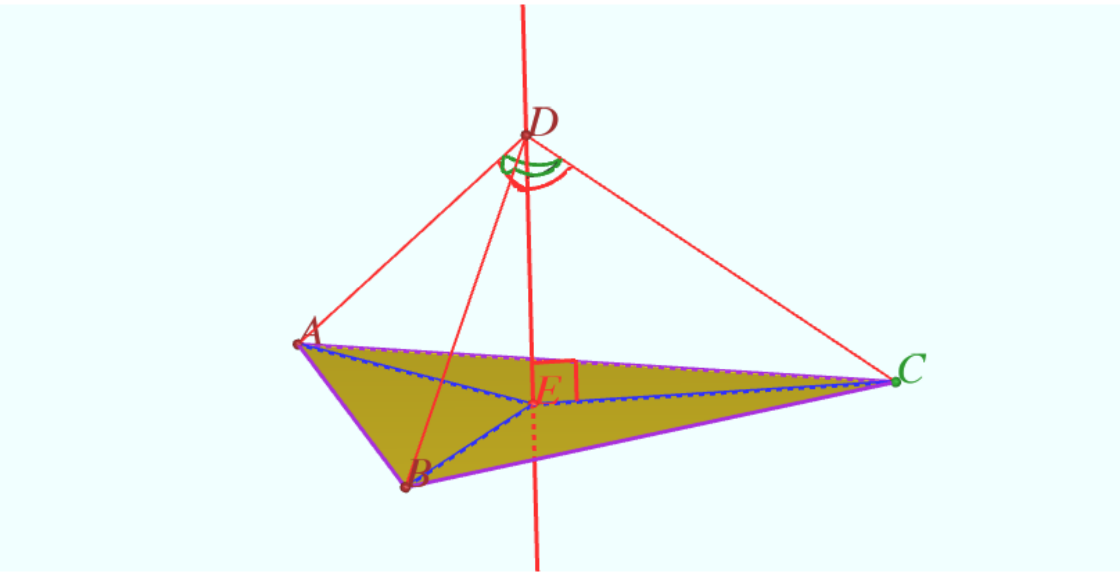

Рис. 18. Равные углы между прямой и рёбрами трёхгранного угла

Задание 19

Угол между рёбрами правильной четырёхугольной пирамиды

Шаг 1. Задание. В правильной четырёхугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен углу наклона ребра к не содержащей его боковой грани. Найдите этот угол.

Шаг 2. Решение. Чтобы изобразить угол наклона ребра ***ED*** к не содержащей его боковой грани, например, к ***ABE,*** надо достроить грань до плоскости и провести прямую, ей перпендикулярную. Пусть ***F*** – основание перпендикуляра из точки ***D*** на плоскость ***ABE.***

Шаг 3. Поскольку ***DF*** – это перпендикуляр к плоскости ***ABE***, то ***∠DEF*** – это угол наклона ребра ***DE*** к грани ***ABE***. Равными по условию являются углы $\angle EDH = \angle DEF$.

Шаг 4. Сравним ***DF*** и ***EH***. Прямоугольные треугольники Δ***DEF*** = Δ***EDH*** (по общей стороне и углу). Значит, ***DF = EH***.

Шаг 5. Рассмотрим сечение пирамиды, содержащее ***EH*** и перпендикулярное ребру ***AB***. Этим сечением является Δ***ED'G.*** Он равнобедренный (в правильной пирамиде ***ED' = EG***). Его высота ***D'F' = DF***, так как ***CD||AB*** и ***CD||ABE***. Но ***EH = DF***, значит, равны высоты ***D'F' = EH***. Равнобедренный треугольник в этом случае – равносторонний.

Шаг 6. Чтобы выполнить расчёт, зададим сторону квадрата основания ***AB = 2a***. Тогда отрезок ***DH*** равен половине диагонали основания $DH = a\sqrt{2}$. Высота пирамиды — это высота правильного треугольника со стороной ***AB:*** $EH = a\sqrt{3}$. По соотношению для тангенса угла

$$tg\,\varphi = \frac{EH}{DH} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

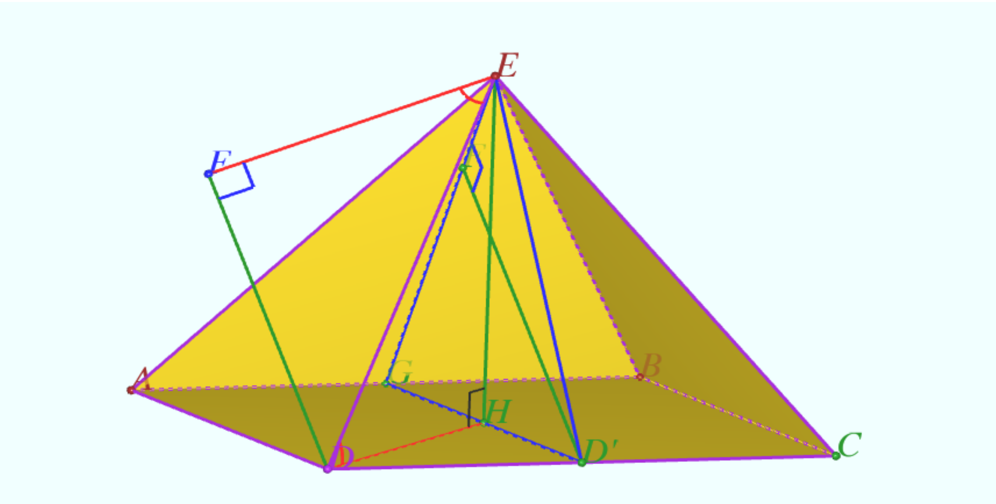

Рис. 19. Угол между рёбрами правильной четырёхугольной пирамиды

Задание 20

Угол между медианами правильной четырёхугольной пирамиды

Шаг 1. Задание. В правильной четырёхугольной пирамиде ***ABCDE F*** – середина ***DE, G*** – середина ***CE***. Найдите угол между прямыми ***AF*** и ***DG***, если ***AB = AE***.

Шаг 2. Создаём угол, равный искомому. Пусть ***K*** – середина ***AB***. Тогда ***AK = FG,*** так как обе они равны половине ребра основания. ***AK||FG***, так как обе они параллельны ребру ***CD***. Значит, ***AKGF*** - параллелограмм. Следовательно, ***AF||GK, ∠DGK*** равен искомому.

Шаг 3. Боковые грани пирамиды — правильные треугольники. Пусть ***AB = 2***. По теореме Пифагора ***KD² = 5.*** Высоты правильных треугольников ***AF = GD = KG. AF² = 3.***

$$\cos\varphi = \left|\frac{KD^2}{2\,DG^2} - 1\right| = \frac{1}{6}.$$

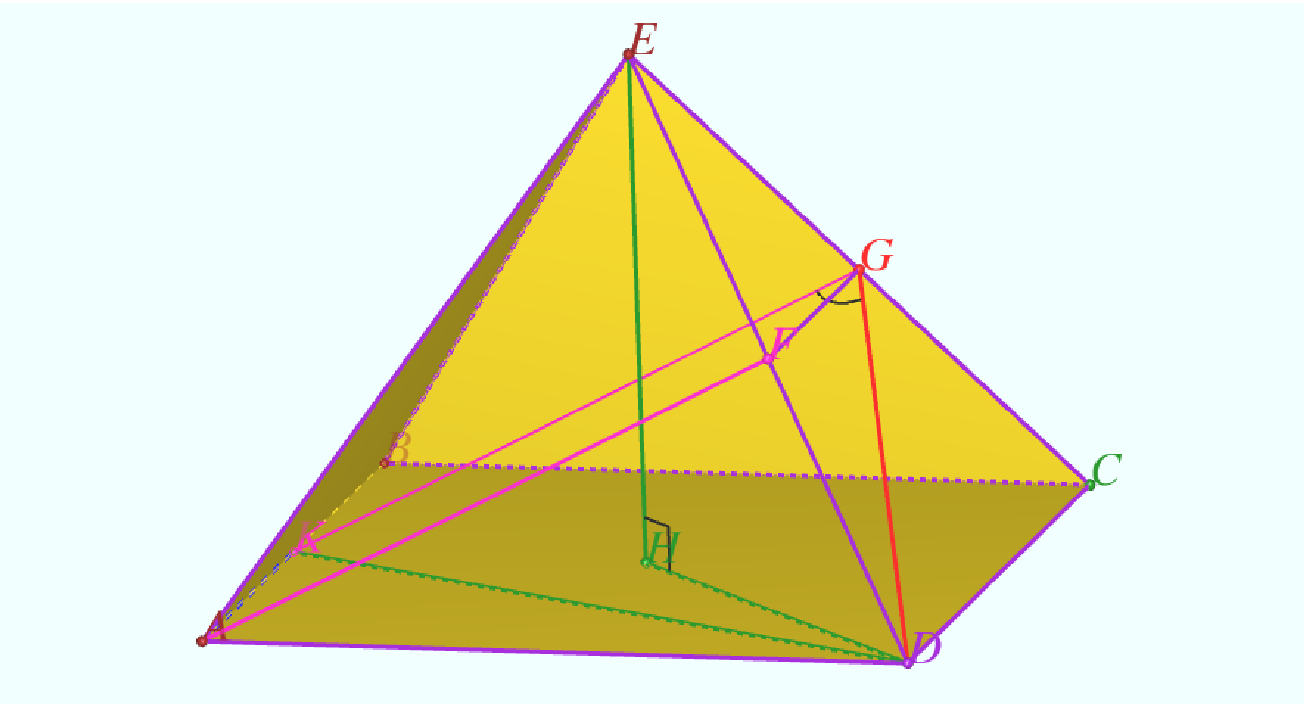

Рис. 20. Угол между медианами правильной четырёхугольной пирамиды

Задание 21

Углы над прямоугольником

Шаг 1. Задание. В прямоугольнике ***ABCD*** даны стороны ***AB = a, BC = b.*** Точка ***M*** такова, что ***MC = a,*** $AM^2 - 2BM^2 = 2a^2 - b^2$***.*** Найдите угол между прямыми ***BD*** и ***CM***.

Шаг 2. Исследование. На рисунке построен верный чертёж, то есть точка ***M*** такова, что ***MC = a,*** $AM^2 - 2BM^2 = 2a^2 - b^2$***.*** Пользуясь чертежом, исследуйте возможные положения точки ***M***.

Шаг 3. Построим точку ***E*** симметричную ***A*** относительно ***B***. Тогда ***BDCE*** – параллелограмм и ***BD||CE BD = CE***. $\angle$ ***MCE*** – искомый. Предложите рабочие гипотезы.

Предложите ученикам закончить решение дома самостоятельно.

Шаг 4. Найдём ***ME***. Поскольку ***BM*** – это медиана треугольника ***AME***, по соотношению для медианы $AM^2 + ME^2 = 2BM^2 + 2AB^2$, то есть ***ME = BC =b***.

Шаг 5. По трём сторонам равны треугольники ***ΔCME = ΔBAD.*** Эти треугольники прямоугольные, значит, ***∠MCE = ∠ABD = arctg(b/a).***

Рекомендуем учителю подобрать числа и подставить их в текст файла до начала решения. Например MC = AB = 3, BC = 4, BM = 2, $AM = \sqrt{10}$.

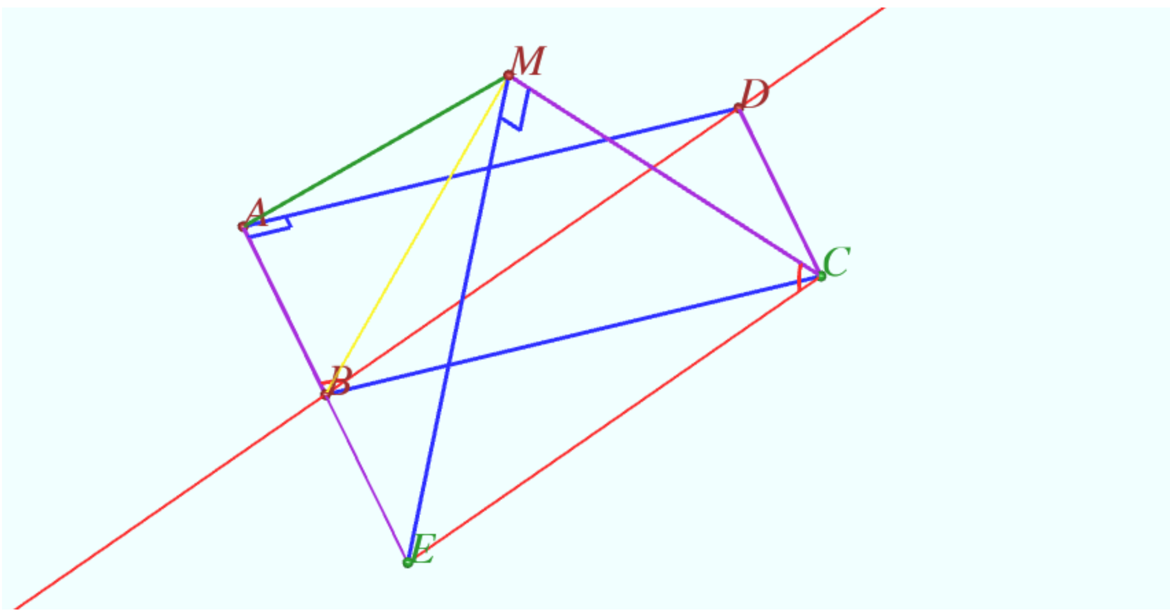

Рис. 21. Углы над прямоугольником

Задание 22

Перпендикулярность прямых и сумма квадратов

Пусть ***A,B,C*** и ***D*** – различные точки пространства. Докажите эквивалентность условий $AC\perp BD$ и $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Шаг 1. Задание. Докажите, что $AB\perp CD$ тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$.

Шаг 2. Задание 1. Докажите, что если $AB\perp CD$, то $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$.

Шаг 3. Строим $AE\perp CD$. Тогда плоскость ***ABE*** в которой две прямые перпендикулярны ***CD*** перпендикулярна ***CD.*** Значит, $BE\perp CD$. По теореме Пифагора $BC^2 + AD^2 = AE^2 + DE^2 + BE^2 + CE^2 = AC^2 + BD^2$.

Шаг 4. Задание 2. Докажите, что если $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$, то $AB\perp CD$.

Шаг 5. Пусть $AE\perp CD$, $BE'\perp CD$. В этот момент мы не имеем оснований считать, что перпендикуляры попадут в одну и ту же точку. $DE^2 - CE^2 = AD^2 - AC^2 = BD^2 - BC^2 = DE'^2 - CE'^2$. $CD = CE + DE = CE' + DE'$. Отсюда $CE' = CE'$. Теперь мы доказали, что перпендикуляры попадут в одну и ту же точку $E = E'$. Плоскость ***ABE*** в которой две прямые перпендикулярны ***CD*** перпендикулярна ***CD.*** Значит, $AB\perp CD$.

Шаг 6. Задание 3. В пирамиде ***ABCD*** даны рёбра $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Найдите ***AD***, если известно, что $AC\perp BD$.

Шаг 7. Ответ. $AD^2 = AB^2 + CD^2 - BC^2$.

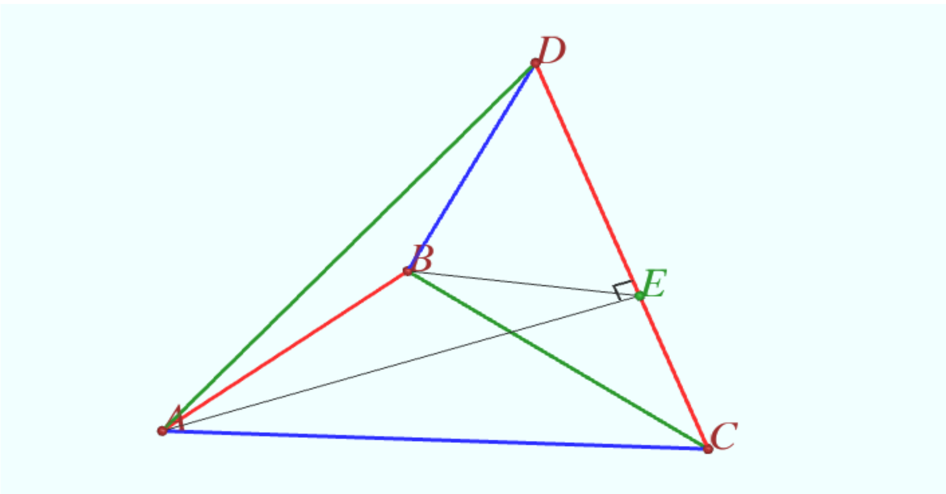

Рис. 22. Перпендикулярность прямых и сумма квадратов

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Геометрия. 10 – 11 кл.: Учебник. –М.: Дрофа, 2007. – 206 с.

1.3. *Угол между скрещивающимися прямыми*. с. 22 – 24.

2. А.Ю.Калинин, Д.А. Терешин. Стереометрия 10. –М.: МФТИ, 1996. – 256 с.

4. *Перпендикулярность в пространстве.*

3. С.Ф. Шестаков. Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии. –М.: МЦНМО, 2005. – 112 с.

4. Я.П. Понарин. Элементарная геометрия: –Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. –М.: Изд. МЦНМО. 2006. – 256 с.

Глава 1. Прямые и плоскости. с.15 – 30.

5. В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. –М.: «НАУКА», 1989, Библиотека математического кружка, вып. 19. – 287 с.

6. В. В. Прасолов. Задачи по стереометрии: Учебное пособие. –М.: МЦНМО, 2010. – 352 с.