ВСЕРОССИЙСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ, 9 класс

2007–2008 учебный год

9.1. Пусть D – дискриминант приведенного квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$. Найдите корни трехчлена, если известно, что они различны, и один из них равен D, а другой равен 2D.

9.2. Пусть AC – наибольшая сторона треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности. На стороне AC выбраны точки M и N такие, что $AM = AB$, $CN = CB$. Докажите, что треугольник MIN – равнобедренный.

9.3. При отборе в группу космонавтов каждый из 50 кандидатов получил одно или несколько из 10 заданий; при этом не было задания, которое получили все кандидаты. Оказалось, что у любых двух из них было общее задание. Докажите, что у каких-то двоих кандидатов было хотя бы два общих задания.

9.4. На доске написаны два взаимно простых натуральных числа x и y. Разрешается дописывать на доску либо утроенное произведение любых двух из написанных чисел, либо увеличенную на 1 сумму любых двух из написанных чисел. Верно ли, что на доске можно получить квадрат натурального числа при любых начальных x и y?

9.5. У Пети в копилке 1000 монет достоинством в 1 руб., 2 руб., 5 руб. на общую сумму 2000 руб., причем монет каждого достоинства не меньше 10. Докажите, что количество однорублевых монет – составное число.

9.6. Найдите количество квадратных трехчленов вида $x^2 + ax + b$, у которых a, b – натуральные, $ab = 2^{2007}$, а корни – действительные числа.

9.7. Точка K – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катете BC выбрана точка M так, что BM = 2MC. Докажите, что $\angle MAB = \angle MKC$.

9.8. У Васи был набор из 2007 трехклеточных уголков. Петя при клеил к каждому уголку по одной клетке; сторона клетки приклеивается к стороне клетки уголка. При этом у Васи получил ся набор из 2007 четырехклеточных фигурок, причем фигурок квадрат и змея (две верхние клетки сдвинуты вправо на одну клетку) вида и получилось не более, чем по 10. Могло ли так оказаться, что Вася не сможет сложить (без дырок и перекрытий) из получившегося набора никакой прямоугольник, используя все 2007 фигурок?

2008–2009 учебный год

9.1. Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

9.2. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству $a^3 b + a b^3 + 2 a^2 b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$. Докажите, что число $1-ab$ является квадратом рационального числа.

9.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB', CC'. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A', пересекает прямую $B'C'$ в точке D. Докажите, что угол ADC прямой.

9.4. Отрезки параллельные сторонам правильного треугольника разбивают его на 25 равных. Эти треугольники занумерованных числами от 1 до 25. 1 – верхний, 2,3,4 – следующий ряд, 5,6,7,8,9 – следующий и так далее. Можно ли эти же числа расставить в клетках квадрата 5 × 5 так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольниках, были записаны и в соседних клетках квадрата? (Треугольники, так же, как и клетки квадрата, считаются соседними, если имеют общую сторону.)

9.5. На 11 листках бумаги написаны 11 фраз (по одной на листке):

1) Левее этого листка нет листков с ложными утверждениями.

2) Ровно один листок левее этого содержит ложное утверждение.

3) Ровно 2 листка левее этого содержат ложные утверждения.

. . .

11) Ровно 10 листков левее этого содержат ложные утверждения.

Листки в некотором порядке выложили в ряд, идущий слева направо. После этого некоторые из написанных утверждений стали верными, а некоторые неверными. Каково наибольшее возможное число верных утверждений?

9.6. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 8^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 8^m быть равной 6?

9.7. Дан параллелограмм ABCD, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω.

9.8. В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов, причем каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Известно, что любые два шахматиста, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом турнире. (За выигрыш партии шахматисту начисляется 1 очко, за ничью 0,5 очка, за поражение 0.)

2009–2010 учебный год

9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)=x^2+2a_1x+b_1$, $f_2(x)=x^2+2a_2x+b_2$, $f_3(x)=x^2+2a_3x+b_3$. Известно, что $a_1a_2a_3=b_1b_2b_3>1$. Докажите, что хотя бы один из этих трёхчленов имеет два корня.

9.2. Семь лыжников с номерами 1, 2, . . . , 7 ушли со старта по очереди и прошли дистанцию каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов.

9.3. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

9.4. В треугольнике ABC угол A равен 60◦. Пусть BB1 и CC1 биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B1C1, лежит на стороне BC.

9.5. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

9.6. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B. Из точки P, лежащей на прямой b, опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

9.7. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

9.8. Для каждого натурального n обозначим через Sn сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2$, $S_2 = 2+3 = 5$, $S_3 = 2+3+5 = 10$, ... Могут ли два подряд идущих члена последовательности (S_n) оказаться квадратами натуральных чисел?

2010–2011 учебный год

9.1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

9.2. Дан равнобедренный треугольник ABC (AB = AC). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

9.3. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8 × 8 проведена замкнутая не само пересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.

9.4. Даны положительные числа *x, y, z*. Докажите неравенство $\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\le\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

9.5. Найдите все числа ***a*** такие, что для любого натурального *n* число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

9.6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек, обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмечалась точка D, симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC.
Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой.

9.7. Найдите все тройки простых чисел *p, q, r* такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

9.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

2011–2012 учебный год

9.1. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

9.2. Окружности ω1 и ω2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω1 проведена прямая ℓ1, касающаяся ω2. Аналогично, прямая ℓ2 касается ω1 и проходит через центр ω2. Оказалось, что прямые ℓ1 и ℓ2 не параллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных ℓ1 и ℓ2.

9.3. За круглым столом сидят 30 человек рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг лжец, а у лжеца этот друг рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос .Сидит ли рядом с вами ваш друг? сидевшие через одного ответили да. Сколько из остальных могли также ответить .да.? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

9.4. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.

9.5. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6 × 6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?

9.6. Числа a и b таковы, что $a^3-b^3=2$, $a^5-b^5\geq 4$. Докажите, что $a^2+b^2\geq 2$.

9.7. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

9.8. Дан квадрат $n\times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2 × 2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную в зелёный, а каждую зелёную в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?