2007–2008 учебный год

11.1. Числа a, b, c − длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что оба корня уравнения $ax^2 + bx - c = 0$ меньше 1.

11.2. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$ с параллельными сторонами AE и BC. Пусть K − точка пересечения прямых BC и DE. Докажите, что $DK \cdot DA = DC \cdot DB$.

11.3. На доске написаны два взаимно простых натуральных числа x и y. Разрешается дописывать на доску либо удвоенную сумму любых двух из написанных чисел, либо удвоенное произведение любых двух из написанных чисел. Верно ли, что на доске можно получить квадрат натурального числа при любых начальных x и y?

11.4. Вася отметил 10 клеток в квадрате 10 × 10. Всегда ли Петя вырезает из этого квадрата по линиям сетки 19 фигурок по четыре клетки каждая. Это 1) квадрат, 2) клетка лежащая слева на трёх, 3)две клетки сверху сдвинуты вправо на одну клетку по отношению к двум, лежащим снизу, 4) четыре клетки в линию. Всегда ли он может резать так, чтобы фигурки не содержали отмеченные клетки? (Петя может вырезать фигурки разных типов.)

11.5. Назовем число $n^2 - 1$ почти квадратом натурального числа n. Докажите, что произведение двух почти квадратов последовательных натуральных чисел также является почти квадратом натурального числа.

11.6. В 12 новогодних подарках лежат конфеты. Известно, что в любых трех подарках суммарно не менее 100 конфет. Докажите что общее число конфет во всех подарках не меньше 406.

11.7. Найдите два натуральных числа x и y с суммой 2007, для которых выполняется равенство

$$\sqrt{x}\cos\frac{\pi y}{2x}+\sqrt{y}\cos\frac{\pi x}{2y}=0.$$

11.8. Все грани треугольной пирамиды ABCD − равные неравносторонние треугольники. Точка O − центр ее описанной сферы, а H − точка пересечения высот треугольника BCD. Докажите, что плоскость, проходящая через точки A, O, H перпендикулярна плоскости грани BCD.

2008–2009 учебный год

11.1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^5 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

11.2. В некоторых клетках таблицы 10×10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

11.3. Докажите, что $x\cos x \le \frac{\pi^2}{16}$ при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

11.4. В остроугольном не равнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA′ и отмечены точки H и O (точка пересечения высот и центр описанной окружности). Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA′ относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC.

11.5. На плоскости провели несколько прямых и отметили все их точки пересечения. Сколько прямых могло быть проведено, если на одной из проведенных прямых отмечена одна точка, на другой три, а на третьей пять? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

11.6. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что AB = AD. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что CL = BC.

11.7. Даны натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n, что число $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k?

11.8. По кругу стоят 11 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа различаются хотя бы на 20, а сумма любых двух соседних чисел не меньше ста. Найдите минимальную возможную сумму всех чисел.

2009–2010 учебный год

11.1. Каждый катет прямоугольного треугольника увеличили на единицу. Могла ли его гипотенуза увеличиться более, чем на $\sqrt{2}$?

11.2. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является чётным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны.

11.3. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность с диаметром AC. Точки K и M проекции вершин A и C соответственно на прямую BD. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P. Докажите, что угол KPM прямой.

11.4. Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) квадратной, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.

11.5. Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin\alpha > \cos\beta$, $\sin\beta > \cos\gamma$, $\sin\gamma > \cos\alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный.

11.6. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров OSAB и OSCD равна сумме объёмов тетраэдров OSBC и OSDA.

11.7. Целые числа *a, b, c* таковы, что значения квадратных трёхчленов bx^2+cx+a и cx^2+ax+b при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трёхчлен при $x = 1$ принимать значение 2009?

11.8. В клетки квадрата 100×100 расставили числа 1, 2, . . . , 10000, каждое по одному разу; при этом числа, различающиеся на 1, записаны в соседних по стороне клетках. После этого посчитали расстояния между центрами каждых двух клеток, числа в которых различаются ровно на 5000. Пусть S минимальное из этих расстояний. Какое наибольшее значение может принимать S?

2010–2011 учебный год

11.1. Существует ли такое вещественное α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

11.2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.

11.3. На окружности, описанной около прямоугольника ABCD, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в точке M такой, что AM : MD = 2. Пусть O центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD.

11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1,..., x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1,..., y_{2011}$ кг цемента соответственно, причём $x_1 + x_2 +... + x^{2011} = y^1 + y_2 +... + y_{2011}$. За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

11.5. Найдите все числа *a* такие, что для любого натурального *n* число $an(n + 2)(n + 3)(n + 4)$ будет целым.

11.6. Остроугольный треугольник *ABC* вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки *B* и *C*, пересекают касательную к ω, проведенную через точку *A*, в точках *K* и *L* соответственно. Прямая, проведенная через *K* параллельно *AB,* пересекается с прямой, проведенной через *L* параллельно *AC*, в точке *P*. Докажите, что *BP = CP.*

11.7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведённые прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011–угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?

11.8. Даны положительные числа *b* и *c*. Докажите неравенство

$$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \ge (b^{2011}-c^{2011})(b^{2011}+c^{2011})(c^{2011}-b^{2011}).$$

2011–2012 учебный год

11.1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух её членов также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены целые числа.

11.2. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды SABCD проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник ABCD параллелограмм.

11.3. На плоскости нарисованы n > 2 различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с равными длинами. Оказалось, что все векторы $-\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$, $\vec{a}_1-\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$, ..., $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots-\vec{a}_n$ также имеют равные длины. Докажите, что $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n=0$

11.4. Главная аудитория фирмы .Рога и копыта. представляет собой квадратный зал из восьми рядов по восемь мест. 64 сотрудника фирмы писали в этой аудитории тест, в котором было шесть вопросов с двумя вариантами ответа на каждый. Могло ли так оказаться, что среди наборов ответов сотрудников нет одинаковых, причем наборы ответов любых двух людей за соседними столами совпали не больше, чем в одном вопросе? (Столы называются соседними, если они стоят рядом в одном ряду или друг за другом в соседних рядах.)

11.5. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1}<n^{2n}$.

11.6. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две группы так, что любая команда первой группы одержала n побед, а любая команда второй группы ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?

11.7. Даны различные натуральные числа *a, b*. На координатной плоскости нарисованы графики функций *y = sin ax, y = sin bx* и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции *y = sin cx* проходит через все отмеченные точки.

11.8. Выпуклый четырёхугольник *ABCD* таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180°$.

Финальный 5 этап, **2010–2011 учебный год**

11.1. Натуральные числа *d* и *a, a > d*– делители натурального числа n. Докажите, что $a > d + \frac{d^2}{n}$.

11.2. На стороне BC параллелограмма ABCD (∠A < 90°) отмечена точка T так, что треугольник ATD остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно (см. рисунок). Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.

11.3. В Академии Наук 999 академиков. Каждая научная тема интересует ровно троих академиков, и у каждых двух академиков есть ровно одна тема, интересная им обоим. Докажите, что можно выбрать 250 тем из их общей области научных интересов так, чтобы каждый академик интересовался не более, чем одной из них.

11.4. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населённых пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населённых пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причём около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких–то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

11.5. Даны два различных кубических многочлена F(x) и G(x) с единичными старшими коэффициентами. Выписали все корни уравнений F(x) = 0, G(x) = 0, F(x) = G(x). Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена F(x).

11.6. На столе лежит куча из более, чем n^2 камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берёт Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее *n*, либо любое кратное *n* число камней, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи.

11.7. Для натурального ***a*** обозначим через P(***a***) наибольший простой делитель числа a^2+1. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел *a, b, c* таких, что P(a) = P(b) = P(c).

11.8. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N середина дуги BAC его описанной окружности, а M середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.