ВСЕРОССИЙСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ, 10 класс

2007–2008 учебный год

10.1. Сумма каких-то трех членов бесконечной арифметической прогрессии равна сумме каких-то двух членов этой прогрессии. Все члены прогрессии — положительные числа. Докажите, что сумма любых 2007 членов этой прогрессии равна какому-то члену этой прогрессии.

10.2. Окружность, проходящая через вершины B, C и D трапеции ABCD (AD||BC) пересекает сторону AB в точке M, отличной от B. На стороне CD взята точка K так, что BK||DM. Докажите что четырехугольник ABKD можно вписать в окружность.

10.3. На доске написаны два взаимно простых натуральных числа x и y. Разрешается дописывать на доску либо утроенное произведение любых двух из написанных чисел, либо увеличенную на 1 сумму любых двух из написанных чисел. Верно ли, что на доске можно получить квадрат натурального числа при любых начальных x и y?

10.4. Вася отметил 10 клеток в квадрате 10 × 10. Всегда ли Петя может вырезать из этого квадрата по линиям сетки 19 четырехклеточных фигурок вида квадрат, змея (две верхние клетки сдвинуты вправо на одну клетку), полоска и Г, так, чтобы они не содержали отмеченные клетки? (Петя может вырезать фигурки разных типов).

10.5. Известно, что некоторых углов x и y выполняются неравенства $\sin x > \cos y > 0$ и $\cos x > \sin y$. Докажите, что $\sin y < 0$.

10.6. Разность кубов двух линейных функций является квадратным трехчленом. Докажите, что этот трехчлен не имеет действительных корней.

10.7. На сторонах AB, AC треугольника ABC построены наружу равносторонние треугольники ACK и ABL, соответственно. Прямые CL и BK пересекают стороны AB, AC в точках P и Q соответственно и пересекаются в точке R. Известно, что площади треугольника BRC и четырехугольника APRQ равны. Найдите угол BAC.

10.8. Во время отбора в группу космонавтов каждому из 100 кандидатов предлагалось по два задания. Известно, что для любых десяти кандидатов можно выбрать задание, которое ни один из них не получал. При каком наименьшем числе заданий такое возможно?

2008–2009 учебный год

10.1. Квадратный трехчлен f(x) таков, что многочлен $(f(x))^3 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

10.2. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

10.3. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых (все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?

10.4. Окружности ω1 и ω2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω1 и точки C и D на окружности ω2 таковы, что AC и BD общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

10.5. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 2^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 2^m быть равной 6?

10.6. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон BC, CA, AB в точках A1, B1 и C1 соответственно. На продолжении отрезка AA1 за точку A взята точка D такая что AD = AC1. Прямые DB1 и DC1 пересекают второй раз окружность ω в точках B2 и C2. Докажите, что B2C2 диаметр окружности ω.

10.7. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ удовлетворяют равенствам $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 = \ldots = x_{2008}^2 - x_{2008}x_{2009} + x_{2009}^2 = x_{2009}^2 - x_{2009}x_1 + x_1^2$. Докажите, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ равны.

10.8. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется удачной, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причем при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

2009–2010 учебный год

10.1. Девять лыжников ушли со старта по очереди и прошли дистанцию каждый со своей постоянной скоростью. Могло ли оказаться, что каждый лыжник участвовал ровно в четырёх обгонах? (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.)

10.2. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

10.3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

10.4. Натуральное число b назовём удачным, если для любого натурального a такого, что a^5 делится на b^2, число a^2 делится на b. Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2010.

10.5. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $ax^2+bx+c > cx$ при любом x. Докажите, что $cx^2 - bx + a > cx - b$ при любом x.

10.6. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через произвольную точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

10.7. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

10.8. Назовём лестницей высоты n фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

2010–2011 учебный год

10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.

10.2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K так, что ∠ABM = ∠CBK. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABM, ABK, CBM и CBK, лежат на одной окружности.

10.3. Даны различные натуральные числа a1, a2, . . . , a14. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_\ell$, где $1 \leq k, l \leq 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02,..., 99)?

10.4. Ненулевые числа a, b, c таковы, что любые два из трёх уравнений $a x^{11} + b x^4 + c = 0$, $b x^{11} + c x^4 + a = 0$, $c x^{11} + a x^4 + b = 0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.

10.5. Найдите все числа ***a*** такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым.

10.6. На доску выписаны 2011 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

10.7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C0 и B0 середины сторон AB и AC соответственно, O центр описанной окружности, H точка пересечения высот. Прямые BH и OC0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB0 в точке Q. Оказалось, что четырехугольник OPHQ ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

10.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

2011–2012 учебный год

10.1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырех из оставшихся.

10.2. Дан выпуклый шестиугольник *ABCDEF.* Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники *ABDF* и *ACDE* являются вписанными. Докажите, что прямые *BF* и *CE* параллельны.

10.3. Последовательность чисел a_1, a_2,... задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и при всех $n > 2$ $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$. Докажите, что все члены последовательности целые числа.

10.4. На окружности отмечено $2N$ точек (N натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

10.5. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Петей, оказаться различными?

10.6. Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доску пятнадцать чисел $1 + a$, $1 + a^2$, $1 + a^3$,..., $1 + a^{15}$. Затем он стёр несколько чисел так, что любые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

10.7. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную в зелёный, а каждую зелёную в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

10.8. В трапеции *ABCD* боковая сторона *CD* перпендикулярна основаниям, *O* - точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника *OCD* взята точка *S*, диаметрально противоположная точке *O*. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.