Экстремумы

Экстремальные (оптимальные, наибольшие и наименьшие) значения выражений всегда вызывали интерес, как наиболее выгодные. В любом соревновании при одинаковых условиях и силах соперников выигрывает именно тот, кто способен найти оптимум.

Ниже будут рассмотрены ряд методов поиска экстремумов. Задачи будут добавляться постепенно в течении 2012 — 2013 учебного года.

Содержание

Логические подходы

Задание 1

В уездном городе *M* в метро запрещено провозить предметы, длина, ширина или высота которых превышают 1 м. Как в этом городе можно провезти в метро лыжи длиной 1 м 70 см.

Исследование:

Какой наибольший предмет можно провозить?

Тот у которого каждый размер равен одному метру.

Какой отрезок наибольшей длины можно разместить в кубе?

Тот у которого длина равна диагонали куба.

Решение:

Поместить лыжи в коробку в форме куба со стороной чуть меньше 1 м.

Задание 2

Семья (папа, мама, сын и бабушка) ночью подошла к мосту, способному выдержать только двух человек одновременно. По мосту можно двигаться только с фонариком. Известно, что папа может перейти мост за одну минуту, мама – за две, сын – за пять и бабушка – за десять минут. Фонарик у них один. Светить издали нельзя. Если по мосту идут двое, время перехода определяется более медленным членом семьи. Как семье переправиться через мост за 17 минут?

Исследование:

Кто потребляет много времени?

Бабушка (10 мин) и сын (5 мин).

Как можно уменьшить затраты времени коллектива?

Медлительные сын и бабушка *должны идти вместе.*

Как можно обеспечить возможность совместного однократного перехода сына и бабушки?

Темпераментные папа и мама могут «обслужить» их переход, перенося фонарик.

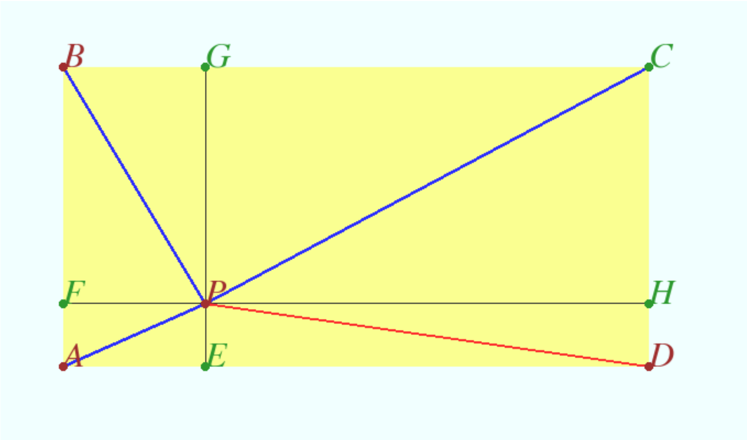
Решение: Первыми переходят мама и папа (2), папа возвращается (1), переходят сын и бабушка (10), мама возвращается (2), переходят папа и мама (2): 2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17 минут.

Задание 3

Расстояния от точки внутри прямоугольника до трёх его вершин равно 10, 13 и 15. Найти наибольшее возможное расстояние от этой точки до четвёртой вершины прямоугольника.

Исследование:

Заметим, что $AP^2=EP^2+FP^2$. Использование четырёх аналогичных уравнений позволяет установить, что $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$. Отсюда следует, что $DP^2=AP^2+CP^2-BP^2$. Значит, возможны три значения DP, причем наибольшее в случае, если $BP=10$.



Подбор решения и доказательство оптимальности
Задание 2.1

Для каждого натурального n найти наибольшее значение Π, которое принимает произведение натуральных чисел, сумма которых равна n.

Исследование:

Очевидно, что выделять единицу в качестве слагаемого в сумме и множителя в наибольшем произведении бессмысленно, так как этот множитель не увеличивает произведение. Значит все слагаемые-множители не меньше, чем 2.

Если $n = 1$, то $\Pi(n) = 1$. Если $n = 2$, то $\Pi(n) = 2$. Если $n = 3$, то $\Pi(n) = 3$.

Если $n = 4$, то $\Pi(n) = 4 = 2\cdot 2$. Если $n = 5$, то $\Pi(n) = 3\cdot 2 = 6$.

Если $n = 6$, то $\Pi(n) = 3\cdot 3 = 9 = 3^2 > 2\cdot 2\ 2 = 8$.

Если $n = 7$, то $\Pi(n) = 3\cdot 4 = 12$.

Если $n = 8$, то $\Pi(n) = 3\cdot 3\cdot 2 = 18 = 3^2\cdot 2$.

Если $n = 9$, то $\Pi(n) = 3\cdot 3\cdot 3 = 27 = 3^3$. Заметим, что для 3, 6 и 9 выражение имеет одинаковый вид. Возникает предположение, что если $n = 3k$, то множителями являются тройки. При этом $\Pi(3\mathrm{k}) = 3^k$.

Если $n = 10$, то $\Pi(n) = 3\cdot 3\cdot 4 = 12 = 3^2\cdot 4$. Заметим, что для 4, 7 и 10 выражение имеет одинаковый вид. Возникает предположение, что если $n = 3k + 1$, то множителями являются тройки и одна четвёрка. При этом $\Pi(3\mathrm{k}+1) = 4\cdot 3^k$.

Если $n = 11$, то $\Pi(n) = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 2 = 54 = 3^3\cdot 2$. Заметим, что для 2, 5, 8 и 11 выражение имеет одинаковый вид. Возникает предположение, что если $n = 3k + 2$, то множителями являются тройки и одна двойка. При этом $\Pi(3\mathrm{k}+2) = 2\cdot 3^k$.

На основании проведенного исследования видно, что число надо разбивать на тройки и одну или две двойки. Значит, требуется доказать, что именно такое разбиение дает наибольшее произведение. Часто применяемым методом в подобных случаях является метод упорядочивания (например, по возрастанию). При оформлении работы раздел исследование оставьте на черновике. Заметим, что случай $n = 1$, особый и его надо оговорить отдельно.

Решение: $\Pi(1) = 1$.

Упорядочим слагаемые числа $n > 1$ по возрастанию: $n = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_i,\ m_1 \le m_2 \le m_3 \le \ldots \le m_i$. Тогда $\Pi(n) = m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot \ldots \cdot m_i$.

Если $m_1 = 1$, то заменим сумму $m_1 + m_2$ на одно число. При этом сумма останется равной n. Поскольку $1\cdot m_2 < 1 + m_2$, от такой замены произведение возрастёт. Значит, все слагаемые числа n, произведение которых наибольшее, больше, чем единица.

Если $m_i \ge 4$, то заменим m_i на пару чисел 2 и $(m_i - 2)$. При этом сумма останется равной n. Поскольку $2(m_i - 2) \ge m_i$, произведение не уменьшится. Значит, все слагаемые числа n, произведение которых наибольшее, могут быть меньше, чем четыре.

Если $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, то заменим $2 + 2 + 2$ на $3 + 3$ и произведение возрастёт. Значит, среди слагаемых числа n, произведение которых наибольшее, могут быть только одна или две двойки.

Установлено, что для любого числа $n > 1$ максимальному произведению Π соответствует набор чисел состоящий только из двоек и троек, причём число двоек не более, чем 2. Значит, если $n = 3k = 3 + 3 + \ldots + 3$, то $\Pi(3k) = 3^k$. Если $n = 3k + 2 = 2 + 3 + 3 + \ldots + 3$, то $\Pi(3k+2) = 2\cdot 3^k$. Если $n = 3k + 1 = 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots + 3$, то $\Pi(3k+1) = 2\cdot 2\cdot 3^{k-1} = 4\cdot 3^{k-1}$.

Ответ: $\Pi(1) = 1$. $\Pi(3k) = 3^k,\ \Pi(3k+1) = 4\cdot 3^{k-1},\ \Pi(3k+2) = 2\cdot 3^k$.

Параметрическое представление
Задание 3.1

Найти максимум и минимум выражения $x^2-xy+2y^2$ при условии: $3x^2-2xy+4y^2=19$.

Решение стандартное: Для того, чтобы найти экстремум выражения, это выражение обозначаем, как параметр. Далее решаем систему уравнений с параметром. Найдя решение, исследуем значения параметра, при которых можно построить решение.

Обозначим $x^2-xy+2y^2=p$. Решаем систему уравнений методом избавления от правой части:

$$\begin{cases} 3x^2-2xy+4y^2=19, \\ x^2-xy+2y^2=p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3px^2-2pxy+4py^2=19p, \\ 19x^2-19xy+38y^2=19p, \end{cases}$$

$$(3p-19)x^2-(2p-19)xy+(4p-38)y^2=0.$$

Дискриминант этого уравнения $D=-44p^2+684p-2527=44\left(p-\frac{133}{22}\right)\cdot\left(\frac{19}{2}-p\right)\geq 0..$

Отсюда находим диапазон возможных значений искомой функции: $p\in\left[\frac{133}{22},\frac{19}{2}\right]$.

Решение упрощенное: Рассматривая условие, как уравнение для игрека, найдём:

$y=\frac{x\pm\sqrt{76-11x^2}}{4}$. Значит, $x^2\leq\frac{76}{11}$. Подставив значение в выражение, получим:

$$f=x^2-xy+2y^2=\frac{19-x^2}{2},\ x^2\leq\frac{76}{11}.$$

Максимум выражение достигает при $x = 0$, $max(f)=\frac{19}{2}$. Минимум выражение достигает при $x^2=\frac{76}{11,} min(f)=\frac{133}{22}$.

Ответ: $\frac{19}{2},\frac{133}{22}$.

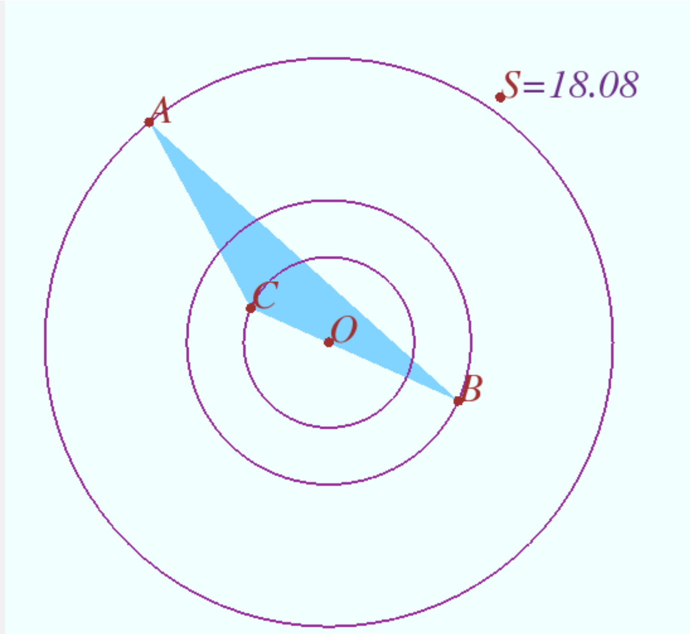
4. *Допустимое варьирование*

Задание 4.1

Расстояния от некоторой точки *O* до вершин треугольника *ABC* равны соответственно $a \ge b \ge c$. Найдите наибольшую возможную площадь треугольника в двух случаях. Если *a* = 11, *b* = 7, *c* = 2. Если *a* = 39, *b* = 33, *c* = 25.

Исследование:

Для исследования войдем в интерактивный файл щелчком по рисунку и будем изменять положение точек и параметры задачи. Полезно посмотреть простые случаи. Если все три расстояния равны, то наибольшую площадь имеет правильный треугольник. Если два расстояния равны, например, *b* = *c*, то искомым оказывается равнобедренный в котором ось симметрии *OA*. Если задать одно из расстояний равным нулю, например, *c* = 0, то искомым окажется прямоугольный треугольник со сторонами *a* и *b.* Рассматривая построенные конфигурации заметим, что точка *O* во всех случаях близка к ортоцентру треугольника.



Анализ:

Пусть искомый треугольник построен. Зафиксируем точку *O*, от которой заданы расстояния, и две из трёх его вершин, например, *A* и *B*, а точку *C* будем перемещать допустимым образом. Точка *C* может двигаться, сохраняя расстояние до *O*, то есть по окружности с центром в *O*. При этом максимальная площадь будет достигнута в тот момент, когда высота, опущенная из *C* на *AB*, окажется максимальной. Но эта высота складывается из фиксированной высоты треугольника *ABO* и проекции отрезка *CO* на перпендикуляр к *AB*. Значит, она максимальная, если *CO* перпендикулярно *AB*. Аналогично докажем, что каждый из трех данных отрезков перпендикулярен противолежащей стороне, то есть данные отрезки совпадают с частями высот от ортоцентра до вершин.

Решение:

Пусть углы треугольника *ABC* равны α, β, γ, α, β, γ, соответственно. Известно, что $BC = 2R\sin\alpha, AC = 2R\sin\beta, AB = 2R\sin\gamma$, где $R-$ радиус описанной окружности треугольника *ABC*. Пусть BB_1 и CC_1 - высоты. Тогда треугольники AC_1B_1 и *ABC* подобны с коэффициентом $\cos\alpha$, AO – это диаметр окружности, описанной вокруг AC_1B_1 Значит, $AO = 2R\cos\alpha, BO = 2R\cos\beta, CO = 2R\cos\gamma$. Пользуясь равенством $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$, получим уравнение:

$$4R^3 - R(a^2 + b^2 + c^2) - abc = 0.$$

Решив это уравнение найдём R и площадь треугольника. Если *a* = 11, *b* = 7, *c* = 2, то $R = 7, S = 30\sqrt{3} \approx 51{,}96$. Если *a* = 39, *b* = 33, *c* = 25, то $R = 32{,}5, S = 1344$.