

Экстремумы

Экстремальные (оптимальные, наибольшие и наименьшие) значения выражений всегда вызывали интерес, как наиболее выгодные. В любом соревновании при одинаковых условиях и силах соперников выигрывает именно тот, кто способен найти оптимум.

Ниже будут рассмотрены ряд методов поиска экстремумов. Задачи будут добавляться постепенно в течении 2012 — 2013 учебного года.

Содержание

1. Логические подходы
2. Подбор решения и доказательство оптимальности
3. Параметрическое представление
4. Допустимое варьирование

Логические подходы

Задание 1

В уездном городе M в метро запрещено провозить предметы, длина, ширина или высота которых превышают 1 м. Как в этом городе можно провезти в метро лыжи длиной 1 м 70 см.

Исследование:

Какой наибольший предмет можно провозить?

Тот у которого каждый размер равен одному метру.

Какой отрезок наибольшей длины можно разместить в кубе?

Тот у которого длина равна диагонали куба.

Решение:

Поместить лыжи в коробку в форме куба со стороной чуть меньше 1 м.

Задание 2

Семья (папа, мама, сын и бабушка) ночью подошла к мосту, способному выдержать только двух человек одновременно. По мосту можно двигаться только с фонариком. Известно, что папа может перейти мост за одну минуту, мама – за две, сын – за пять и бабушка – за десять минут. Фонарик у них один. Светить издали нельзя. Если по мосту идут двое, время перехода определяется более медленным членом семьи. Как семье переправиться через мост за 17 минут?

Исследование:

Кто потребляет много времени?

Бабушка (10 мин) и сын (5 мин).

Как можно уменьшить затраты времени коллектива?

Медлительные сын и бабушка *должны идти вместе*.

Как можно обеспечить возможность совместного однократного перехода сына и бабушки?

Темпераментные папа и мама могут «обслужить» их переход, перенося фонарик.

Решение: Первыми переходят мама и папа (2), папа возвращается (1), переходят сын и бабушка (10), мама возвращается (2), переходят папа и мама (2): $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ минут.

Задание 3

Расстояния от точки внутри прямоугольника до трёх его вершин равно 10, 13 и 15. Найти наибольшее возможное расстояние от этой точки до четвёртой вершины прямоугольника.

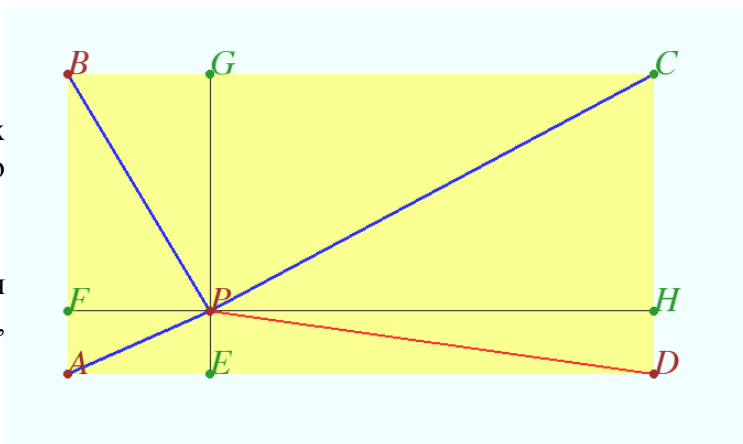
Исследование:

Заметим, что $AP^2 = EP^2 + FP^2$.

Использование четырёх аналогичных уравнений позволяет установить, что

$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$. Отсюда следует, что $DP^2 = AP^2 + CP^2 - BP^2$.

Значит, возможны три значения DP , причем наибольшее в случае, если $BP = 10$.



Подбор решения и доказательство оптимальности

Задание 2.1

Для каждого натурального n найти наибольшее значение P , которое принимает произведение натуральных чисел, сумма которых равна n .

Исследование:

Очевидно, что выделять единицу в качестве слагаемого в сумме и множителя в наибольшем произведении бессмысленно, так как этот множитель не увеличивает произведение. Значит все слагаемые-множители не меньше, чем 2.

Если $n = 1$, то $P(n) = 1$. Если $n = 2$, то $P(n) = 2$. Если $n = 3$, то $P(n) = 3$.

Если $n = 4$, то $P(n) = 4 = 2 \cdot 2$. Если $n = 5$, то $P(n) = 3 \cdot 2 = 6$.

Если $n = 6$, то $P(n) = 3 \cdot 3 = 9 = 3^2 > 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Если $n = 7$, то $P(n) = 3 \cdot 4 = 12$.

Если $n = 8$, то $P(n) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18 = 3^2 \cdot 2$.

Если $n = 9$, то $P(n) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 = 3^3$. Заметим, что для 3, 6 и 9 выражение имеет одинаковый вид. Возникает предположение, что если $n = 3k$, то множителями являются тройки. При этом

$$P(3k) = 3^k.$$

Если $n = 10$, то $P(n) = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36 = 3^2 \cdot 4$. Заметим, что для 4, 7 и 10 выражение имеет одинаковый вид. Возникает предположение, что если $n = 3k + 1$, то множителями являются тройки и одна четвёрка. При этом $P(3k+1) = 4 \cdot 3^k$.

Если $n = 11$, то $P(n) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54 = 3^3 \cdot 2$. Заметим, что для 2, 5, 8 и 11 выражение имеет одинаковый вид. Возникает предположение, что если $n = 3k + 2$, то множителями являются тройки и одна двойка. При этом $P(3k+2) = 2 \cdot 3^k$.

На основании проведенного исследования видно, что число надо разбивать на тройки и одну или две двойки. Значит, требуется доказать, что именно такое разбиение дает наибольшее произведение. Часто применяемым методом в подобных случаях является метод упорядочивания (например, по возрастанию). При оформлении работы раздел исследования оставьте на черновике. Заметим, что случай $n = 1$, особый и его надо оговорить отдельно.

Решение: $P(1) = 1$.

Упорядочим слагаемые числа $n > 1$ по возрастанию:

$$n = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_i, m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots \leq m_i. \text{ Тогда } P(n) = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_i.$$

Если $m_1 = 1$, то заменим сумму $m_1 + m_2$ на одно число. При этом сумма останется равной n . Поскольку $1 \cdot m_2 < 1 + m_2$, от такой замены произведение возрастет. Значит, все слагаемые числа n , произведение которых наибольшее, больше, чем единица.

Если $m_i \geq 4$, то заменим m_i на пару чисел 2 и $(m_i - 2)$. При этом сумма останется равной n . Поскольку $2(m_i - 2) \geq m_i$, произведение не уменьшится. Значит, все слагаемые числа n , произведение которых наибольшее, могут быть меньше, чем четыре.

Если $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, то заменим $2 + 2 + 2$ на $3 + 3$ и произведение возрастет. Значит, среди слагаемых числа n , произведение которых наибольшее, могут быть только одна или две двойки.

Установлено, что для любого числа $n > 1$ максимальному произведению P соответствует набор чисел состоящий только из двоек и троек, причём число двоек не более, чем 2. Значит, если $n = 3k = 3 + 3 + \dots + 3$, то $P(3k) = 3^k$. Если $n = 3k + 2 = 2 + 3 + 3 + \dots + 3$, то $P(3k+2) = 2 \cdot 3^k$. Если $n = 3k + 1 = 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + 3$, то $P(3k+1) = 2 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} = 4 \cdot 3^{k-1}$.

Ответ: $P(1) = 1$. $P(3k) = 3^k$, $P(3k+1) = 4 \cdot 3^{k-1}$, $P(3k+2) = 2 \cdot 3^k$.

Параметрическое представление

Задание 3.1

Найти максимум и минимум выражения $x^2 - xy + 2y^2$ при условии:
 $3x^2 - 2xy + 4y^2 = 19$.

Решение стандартное: Для того, чтобы найти экстремум выражения, это выражение обозначаем, как параметр. Далее решаем систему уравнений с параметром. Найдя решение, исследуем значения параметра, при которых можно построить решение.

Обозначим $x^2 - xy + 2y^2 = p$. Решаем систему уравнений методом избавления от правой части:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 4y^2 = 19, \\ x^2 - xy + 2y^2 = p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3px^2 - 2pxy + 4py^2 = 19p, \\ 19x^2 - 19xy + 38y^2 = 19p, \end{cases}$$
$$(3p - 19)x^2 - (2p - 19)xy + (4p - 38)y^2 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $D = -44p^2 + 684p - 2527 = 44(p - \frac{133}{22})(\frac{19}{2} - p) \geq 0$.

Отсюда находим диапазон возможных значений искомой функции: $p \in [\frac{133}{22}, \frac{19}{2}]$.

Решение упрощенное: Рассматривая условие, как уравнение для игрека, найдём:

$y = \frac{x \pm \sqrt{76 - 11x^2}}{4}$. Значит, $x^2 \leq \frac{76}{11}$. Подставив значение в выражение, получим:

$$f = x^2 - xy + 2y^2 = \frac{19 - x^2}{2}, x^2 \leq \frac{76}{11}.$$

Максимум выражение достигает при $x = 0$, $\max(f) = \frac{19}{2}$. Минимум выражение

достигает при $x^2 = \frac{76}{11}$, $\min(f) = \frac{133}{22}$.

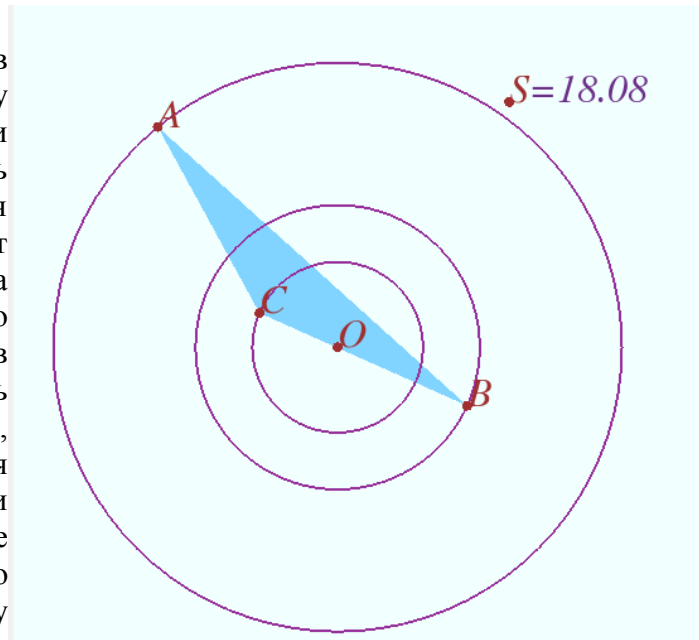
Ответ: $\frac{19}{2}, \frac{133}{22}$.

4. Допустимое варьирование Задание 4.1

Расстояния от некоторой точки O до вершин треугольника ABC равны соответственно $a \geq b \geq c$. Найдите наибольшую возможную площадь треугольника в двух случаях. Если $a = 11, b = 7, c = 2$. Если $a = 39, b = 33, c = 25$.

Исследование:

Для исследования войдем в интерактивный файл щелчком по рисунку и будем изменять положение точек и параметры задачи. Полезно посмотреть простые случаи. Если все три расстояния равны, то наибольшую площадь имеет правильный треугольник. Если два расстояния равны, например, $b = c$, то искомым оказывается равнобедренный в котором ось симметрии OA . Если задать одно из расстояний равным нулю, например, $c = 0$, то искомым окажется прямоугольный треугольник со сторонами a и b . Рассматривая построенные конфигурации заметим, что точка O во всех случаях близка к ортоцентру треугольника.



Анализ:

Пусть искомый треугольник построен. Зафиксируем точку O , от которой заданы расстояния, и две из трёх его вершин, например, A и B , а точку C будем перемещать допустимым образом. Точка C может двигаться, сохраняя расстояние до O , то есть по окружности с центром в O . При этом максимальная площадь будет достигнута в тот момент, когда высота, опущенная из C на AB , окажется максимальной. Но эта высота складывается из фиксированной высоты треугольника ABO и проекции отрезка CO на перпендикуляр к AB . Значит, она максимальная, если CO перпендикулярно AB . Аналогично докажем, что каждый из трех данных отрезков перпендикулярен противоположащей стороне, то есть данные отрезки совпадают с частями высот от ортоцентра до вершин.

Решение:

Пусть углы треугольника ABC равны α, β, γ , α, β, γ , соответственно. Известно, что $BC = 2R \sin \alpha, AC = 2R \sin \beta, AB = 2R \sin \gamma$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC . Пусть BB_1 и CC_1 — высоты. Тогда треугольники AC_1B_1 и ABC подобны с коэффициентом $\cos \alpha$, AO — это диаметр окружности, описанной вокруг AC_1B_1 . Значит, $AO = 2R \cos \alpha, BO = 2R \cos \beta, CO = 2R \cos \gamma$. Пользуясь равенством $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$, получим уравнение:

$$4R^3 - R(a^2 + b^2 + c^2) - abc = 0.$$

Решив это уравнение найдём R и площадь треугольника. Если $a = 11, b = 7, c = 2$, то $R = 7, S = 30\sqrt{3} \approx 51,96$. Если $a = 39, b = 33, c = 25$, то $R = 32,5, S = 1344$.