Решения уравнений и неравенств в целых числах

Пособие содержит описание методов решения уравнений и неравенств в целых числах. Решения сопровождаются интерактивными файлами, выполненными в программах InMA и GInMA. Методы применяют при решении задач ***С6*** для ***ЕГЭ 2013.***

Оглавление раздела

Решения множества задач можно выполнить пользуясь интерактивными файлами программы InMA. Для того, чтобы войти в интерактивный файл программы InMA необходимо с сайта http://www.deoma-cmd.ru/ скачать и установить соответствующий класс, открыть его и выбрать в оглавлении указанный файл. Запись InMA 11, 2.6.1(6) означает, что надо установить программу InMA 11 класс. Войдя в программу, в оглавлении найти Главу 2 (уравнения и неравенства), Раздел 2.6 (Решения в целых числах), и войти в файл 2.6.1 Решение в целых числах. В файле открыть задачу 6. **В демо-версии доступны только условия задач.**

Демо вариант ЕГЭ 2013

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

1. Линейное уравнение с двумя переменными

Целочисленное решение линейного уравнения с двумя переменными является частью решения тригонометрических уравнений с отбором корней. Оно возникает также при решении текстовых задач. Это полезный инструмент решение которого целесообразно помнить.

Пусть дано уравнение:

$$ax - by = c, \tag{1.1}$$

где *a, b* и *c* – целые коэффициенты, а переменные *x* и *y* – целые числа. В вариантах задач они могут быть целыми положительными или целыми неотрицательными. Обозначим наибольший общий делитель чисел *a* и *b* через d = НОД(*a, b*).

Уравнение разрешимо в целых числах *тогда и только тогда*, когда наибольший общий делитель чисел *a* и *b* является также делителем числа *c*.

Таким образом уравнение $8x - 2y = 3$ не разрешимо в целых числах, так как НОД(8, 2) = 2, а 2 не является делителем числа 3. Другими словами, слева чётное число, справа – нечётное.

Частное решение $(x_0\ y_0)$ находим подбором. Например, уравнение

$$7x - 5y = 11 \tag{1.2}$$

имеет решение в целых числах, так как НОД(7, 5) = 1, является делителем числа 11.Числа $x = 1$ и $x = 2$ не устраивают, а значение $x = 3$, $y = 2$ даёт частное решение (3, 2).

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}k, \\ y = y_0 + \dfrac{a}{d}k, \end{cases}$ где k – целое. Например, решение (1.2): $\begin{cases} x = 3 + 5k, \\ y = 2 + 7k. \end{cases}$

Итак, решение уравнения (1.1) содержит либо один шаг в случае если с не делится на *d*, либо два шага, если оно имеет решение.

В программе InMA такие уравнения решены в файле 11 класса 2.6.1, пример 1. Пользователь задаёт все три коэффициента и получает решение и объяснение.

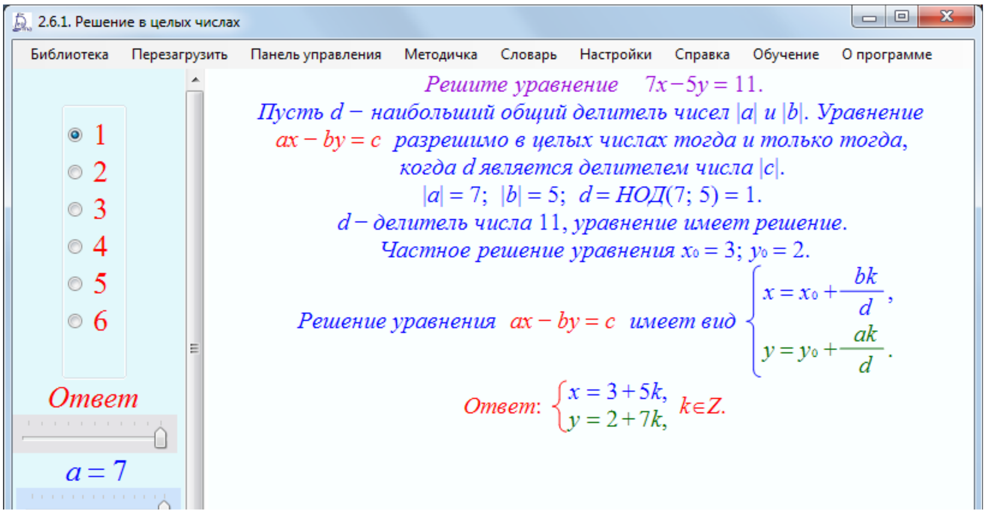

Рис.1. Решение в целых числах уравнений вида $a\,x - b\,y = c$.

1.2. Линейное уравнение с тремя переменными

Решите в целых числах уравнение $ax - by = cz$, $|a| \le |c|$, $|b| \le |c|$. (1.3)

Решите в целых числах уравнение $5x - 7y = 3z$. (1.4)

Решение: Пусть d − наибольший общий делитель чисел $|a|$ и $|b|$. Уравнение $ax - by = 0$ имеет целочисленное решение $\begin{cases} x = \dfrac{b}{d}k, \\ y = \dfrac{a}{d}k, \end{cases} k \in Z.$.

Уравнение $ax - by = cz_0$ разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда d является делителем числа $|cz_0|$.

Если тройка (x_0, y_0, z_0) − это частное решение уравнения $ax - by = cz_0$, то общее решение этого уравнения имеет вид $\begin{cases} x = x_0 m + \dfrac{b}{d}k, \\ y = y_0 m + \dfrac{a}{d}k, \\ z = z_0 m, \end{cases} k \in Z,\ m \in Z.$ Задача сводится к поиску наименьшего z_0, подбору частного решения и записи общего решения.

Решение: Уравнение $5x - 7y = 3z$ запишем в виде $5x - 3z = 7y$. Тройка $(2; 1; 1)$ − частное решение уравнения. Общее решение $\begin{cases} x = 2m + 3k, \\ y = m, \\ z = m + 5k, \end{cases} k \in Z,\ m \in Z.$

2. Задачи, сводящиеся к линейному уравнению

Решите уравнение: $\cos^5 3x + \cos^{13} 7x = -2$.

3. Метод обоснованного перебора

Задание 3.1

Решите в целых числах уравнение $ax^2+by^2=c, a>0, b>0$, ***a*, *b*, *c*** – целые, например, $3x^2+2y^2=206$.

Задание 3.2

Решите в целых числах уравнение $5x^2+3z^2-2yz+y^2=30$.

Задание 3.3

Имеется набор из $4n+1$, $n>2$ внешне одинаковых монет. Либо все монеты настоящие, либо среди них ровно 5 фальшивых (все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). Можно ли при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, есть ли в наборе фальшивые монеты?

5. Разложение многочленов

Докажите, что число $4^{2013}+1$, можно представить в виде произведения трёх натуральных чисел, превышающих 1.

Докажите, что число $(p-1)^{mn}+1$ где *p, n, m* – простые числа, превышающие 2, $m\neq n$ можно представить в виде произведения четырёх натуральных чисел, превышающих 1.

Докажите, что число $(p-1)^{mnk}+1$ где *p, n, m, k* – простые числа, превышающие 2, $m\neq n, m\neq k, k\neq n$ можно представить в виде произведения одиннадцати натуральных чисел, превышающих 1.

4. Метод разложения на множители

4.1. Простейшее уравнение

Решите в целых числах уравнение $xy = a$, где a − целое. (4.1)

Решите в целых числах уравнение $xy = -3$. (4.2)

4.2. Типичное уравнение

Решите в целых числах уравнение $xy + ax + by = c$, где a,b,c − целые. (4.3)

Решите в целых числах уравнение $2xy - x + 5y = \cdot 13$. (4.4)

Решите в целых числах уравнение $4xy + 12x - 5y = \cdot 15$. (4.5)

4.3. Усложнённое уравнение

Решите уравнение $a^2x^2 - b^2y^2 = c$. (4.6)

Решите уравнение $4x^2 - 9y^2 = 7$. (4.7)

4.4. Усложнённое уравнение

Решите уравнение $a^2x^2 = y^2 + 2by + c$. (4.8)

Решите уравнение $4x^2 = y^2 + 10y + 3$. (4.9)

4.5. Усложнённое уравнение

Решите в целых числах уравнение $ax^2+(ab+d)xy+bdy^2=c$.

Задание 4.5.1

Решите в целых числах уравнение $3x^2+5xy+2y^2=7$.

4.6. Скрытое уравнение

Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, где p − заданное простое число.

Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$.

5. Исследование делимости

Целочисленные задачи нередко удаётся свести к исследованию сократимости некоторого выражения, например, дроби. При этом используются следующие свойства дроби.

Если числитель или знаменатель умножить на простое число, то полученная дробь может сократиться либо на общий делитель, либо на этот множитель.

Если из дроби, не являющейся целым числом, вычесть целое число, то общий делитель числителя и знаменателя не изменится.

Задание 5.1

В каждом классе некоторой школы одинаковое число парт. Парты с одного этажа можно перевезти на грузовике по 5 штук, причём на последний рейс останется 2 парты. Парты с другого этажа можно перевезти на другом грузовике по 7 штук, причём на последний рейс останется 4 парты. Второй грузовик при этом сделает на один рейс больше. Найти число парт в каждом классе этой школы.

Задание 5.2

В каждой из нескольких стай бабочек содержится поровну особей (в стае не менее, чем две бабочки). Некоторые стаи расположились на клумбе, причём на каждом цветке было по три бабочки, кроме самого большого, на котором поместились четыре бабочки. Другие стаи расположились на полянке, причём на каждом цветке было по пять бабочек, кроме одного, на котором поместились только две бабочки. Сколько бабочек было в стае, если число цветков на поляне на 5 больше, чем число цветков на клумбе?

Задание 5.2

Решите в целых числах уравнение $7x^2=5y^2+3$.

Задание 5.3

Решите в натуральных числах уравнение $5^{k-1}=6k+7$.

6. Оценка при исследовании существования решения

6.1. Задание

Найдите все тройки натуральных ***m, n*** и ***k*** таких, что ***mnk = m + n + k***.

6.2. Задание

Найдите число целых решений неравенства $\log_3(85-x^2)\le 65\cdot 4^x$.

6.3. Задание

Уравнение $\sqrt{n+\sqrt{n+..+\sqrt{n}}}=m$ содержит $k\ge 2$ последовательно извлекаемых корней. Решить уравнение в целых числах, то есть найти все возможные значения *k, m* и *n*.

6.4. Задание (ЕГЭ 2013, демо-вариант, задание 6)

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

6.5. Задание (ЕГЭ 2012, по слухам)

В классе учились дети олигархов и дети простолюдинов. На уроке труда детей олигархов было не более, чем $\frac{2}{11}$ от числа учеников, которые в этот момент находились в классе, на уроке математики детей олигархов было не более, чем $\frac{2}{5}$ от числа учеников, которые в этот момент находились в классе. Каждый ребенок был хоть на одном уроке.

а) Могло ли быть в классе 9 детей олигархов и 11 простолюдинов?

б) Какое наибольшее число детей олигархов могло быть в классе из 20 человек?

в) Какую наименьшую долю могли составлять простолюдины в классе?

6.6. Задание (ЕГЭ 2012, по слухам)

Колбасу считаем вкусной, если её длина не меньше, чем 168 мм, но не больше, чем 175 мм.

а) Некоторую колбасину разрезали на 24 вкусных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых вкусных кусков можно было бы разрезать эту колбасину?

б) Найдите такое наименьшее число a, что любую колбасину длина которой больше a, можно разрезать на вкусные куски.

6.7. Задание (С6 – 2011, по слухам)

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами, каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трех членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

7. Простейшие целочисленные уравнения и неравенства

7.1. *Задание*

Сравните числа 2^{2013} и 5^{862}.

7.2. Задание

На вечеринку собралось не менее, чем 17 учеников. Играл оркестр и каждый заказывал песню. Двое заказали о горах, ровно половина — о любви. Остальные, которых было менее, чем 40%, заказали современные мотивы. Сколько учеников было на вечеринке?

7.3. Задание

Найдите все целочисленные решения системы неравенств $\begin{cases} x-y\le -25, \\ x^2-y\le 5, \\ 4x+y\le 1. \end{cases}$.

7.4. Задание

Найдите все целые x и y такие, что $y^2 - 1 = 3 \cdot 2^x$.

7.5. Задание

Найдите все целые x и y такие, что $x(x + 1) = y^2$.

8. Типичные целочисленные уравнения

8.1. Задание

Последовательность чисел $a_1, a_2,\ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и при всех $n > 2$ $a_{n+1}=5\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Докажите, что все члены последовательности целые числа.

8.2. Задание

Найдите все целочисленные решения уравнения

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0.$$

8.3. Задание

Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0.$$

8.4. Задание

Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1}-n!=5(30k+11)$.

8.5. Задание

Найдите значения параметра *a* при которых следующая система имеет ровно 5 различных натуральных решений:

$$\begin{cases} 12x^2-4x-2xy+3y-9=0, \\ ayz+axy+axz>xyz. \end{cases}$$

8.6. Задание

При каких значениях ***a*** уравнение

$$\log_{0.25}\left(\frac{a^2+4\pi^2+4}{4x-x^2-2(a-2\pi)|x-2|+4a\pi}\right)-\sqrt{(x-5a+10\pi-34)(|\pi-x|-a+\pi+2)}=0$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение.

8.7. Задание

Функция $y = f(x)$ задана равенством
$$f(x)=\begin{cases} \log_2\dfrac{x-9}{x+5}-8, x\le -6, \\ \dfrac{-47+8x}{x+6}, x>-6. \end{cases}$$

Найдите все целые числа, которые являются корнями уравнения $f(f(x)) = x$.