

Задания 1 – 5

Задание 5

1. Решите уравнение: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x-7} = \sqrt{3x-5} + \sqrt{5x-9}$.
2. Найдите множество значений функции $y = 4\cos(\pi x) + 3\cos x$.
3. Решите уравнение: $(5-2\sqrt{2})^x + (5+2\sqrt{2})^x = 10^x$.
4. В прямоугольном параллелепипеде две грани с общим ребром покрасили в зелёный цвет, остальные – в жёлтый. Площадь жёлтых граней равна 120. Желтые грани, которые имеют с зелёными по два общих ребра, являются квадратами. Найдите наименьшее значение суммы длин всех рёбер параллелепипеда, исключая общее ребро красных граней.
5. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.
6. Про положительные числа a, b, c известно, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c$. Докажите, что $a + b + c > 3abc$.
7. Тангенсы углов треугольника—натуральные числа. Чему они могут быть равны?
8. Найдите длину медианы треугольника со сторонами a, b, c .
9. Пусть a, b, c, d —целые числа, не равные нулю. Назовем глупыми числа вида $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, а умными числа вида $\sqrt{c+d\sqrt{31}}$. Докажите, что умное число может равняться сумме нескольких глупых.
10. Внутри плоского угла с вершиной A расположена окружность. Через точку M этой окружности проведена прямая, касающаяся окружности и пересекающая стороны угла в точках B и C . Найти условие, при котором площадь треугольника ABC будет наименьшей.
a. Внутри трёхгранного угла с вершиной A расположена сфера. Через точку M этой сферы проведена плоскость, касающаяся сферы и пересекающая рёбра угла в точках B, C и D . Найти условие, при котором объём пирамиды $ABCD$ будет наименьшей.

Задание 4

1. Решите уравнение: $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} + 4 = 42\frac{1}{4}$.
2. В уездном городе M в метро запрещено провозить предметы, длина, ширина или высота которых превышают 1 м. Как в этом городе можно провезти в метро лыжи длиной 1 м 70 см.
3. Семья (папа, мама, сын и бабушка) ночью подошла к мосту, способному выдержать только двух человек одновременно. По мосту можно двигаться только с фонариком. Известно, что папа может перейти мост за одну минуту, мама – за две, сын – за пять и бабушка – за десять минут. Фонарик у них один. Светить издали нельзя. Если по мосту идут двое, время перехода определяется более медленным членом семьи. Как семье переправиться через мост за 17 минут?
4. Для каждого неотрицательного числа a рассмотрим уравнение: $x^3 + ax - a^3 - 29 = 0$. Пусть x_0 – положительный корень этого уравнения. Найдите наименьшее значение x_0 ?
5. Доказать, что прямая, делящая пополам площадь и периметр описанного многоугольника, проходит через центр вписанной в этот многоугольник окружности.
6. В каждом классе некоторой школы одинаковое число парт. Парты с одного этажа можно перевезти на грузовике по 5 штук, причём на последний рейс останется 2 парты. Парты с другого этажа можно перевезти на другом грузовике по 7 штук, причём на последний рейс останется 4 парты. Второй грузовик при этом сделает на один рейс больше. Найти число парт в каждом классе этой школы.
7. Найти выпуклый многоугольник, который не имеет ни оси симметрии, ни центра

симметрии, но который переходит в себя при повороте вокруг некоторой точки на некоторый угол, меньший 180° .

8. Расстояния от точки внутри прямоугольника до трёх его вершин равно 10, 13 и 15. Найти наибольшее возможное расстояние от этой точки до четвёртой вершины прямоугольника.

9. Решите уравнение: $|x-a+1|+|x-2a|=x$.

10. Докажите, что для любого треугольника ABC расстояние AH от вершины до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны BC .

Задание 3

1. Известно, что **угол между скрещивающимися прямыми** считается равным углу между любыми двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным прямым. Докажите, что это определение угла корректно.

2. Уравнение $\sqrt{n+\sqrt{n+\dots+\sqrt{n}}}=m$ содержит $k \geq 2$ последовательно извлекаемых корней. Решить уравнение в целых числах, то есть найти все возможные значения k , m и n . (тема 4)

3. Расстояния от некоторой точки M до вершин треугольника ABC равны соответственно $a \geq b \geq c$. Найдите наибольшую возможную площадь треугольника, если $a = 10$, $b = 5$, $c = 3$.

4. Упростите выражение $\sqrt[3]{3+\frac{11\sqrt{6}}{9}}+\sqrt[3]{3-\frac{11\sqrt{6}}{9}}$.

5. Найдите значение параметра a , при котором наибольшее значение функции:

$$f(x, a) = -x^2 + (20a + 16)x - 95a^2 - 177a + 33 \text{ минимально.}$$

6. В трапеции $ABCD$ с основанием $AD = b = 8$ диагонали пересекаются в точке E . Около треугольника BCE описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E , пересекает прямую AD в точке F , причём $AF = a = 5$. Найдите EF .

7. Все плоские углы при вершине A тетраэдра $ABCD$ прямые. $AB = AC = AD\sqrt{2}$. Найдите двугранные углы тетраэдра.

8. Решите уравнение: $\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}$, где $a = 5$.

9. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y = 5, \\ 3 \sin x + 2 \sin y = 0. \end{cases}$$

10. Для каждого натурального n найти наибольшее значение Π , которое принимает произведение натуральных чисел, сумма которых равна n .

Задание 2

1. Решить уравнение $5x^2 + 3z^2 - 2yz + y^2 = 30$ в целых числах. (тема 4)

2. Поле, площадь которого не меньше, чем 6 соток, имеет вид треугольника одна из сторон которого не длиннее 30 м, а другая не длиннее 40 м. Вокруг поля идёт узкая кольцевая дорога. Найти её радиус. (тема 3)

3. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $2|x+2|+|y|+|2x-y|=4$. (тема 3)

4. При положительных x решите уравнения $x^x=4$ и $x^x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. (тема 6)

5. В треугольнике ABC со стороной $AC = 8$ проведена биссектриса BE . Известно, что площади треугольников ABE и CBE относятся как 3 : 1. Найдите биссектрису при которой высота, опущенная из вершины B на основание наибольшая. (тема 3)

6. Коля написал на доске многозначное число и утверждал, что у него ровно 49 делителей (включая 1 и само число). Вася это отрицает. Дежурный стер почти все число и осталось только несколько первых и последних цифр: 45...7256. Сможет ли учитель выяснить, кто из ребят прав?

7. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, AE и CF высоты, D - середина AC . Найдите $\angle DEF$.

8. В выражении $(2x^3 - 3y^2)^{33}$ найдите сумму коэффициентов и выражение, содержащее наибольший по модулю коэффициент.

9. Найти минимальное значение параметра a , при котором всегда выполняется неравенство: $a^2x^2 + y^2 + z^2 \geq ayz + xy + xz$.

10. Найти максимум и минимум выражения $x^2 - xy + 2y^2$ при условии: $3x^2 - 2xy + 4y^2 = 19$.

Задание 1

1. Решить уравнение $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7$ в целых числах.

2. Корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ являются числа 3, 7 и 2012. Найдите b .

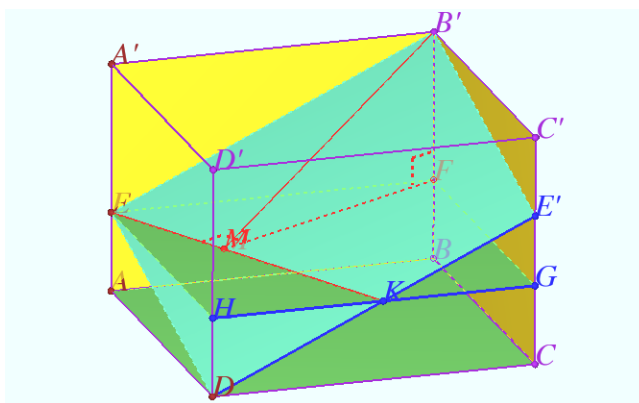
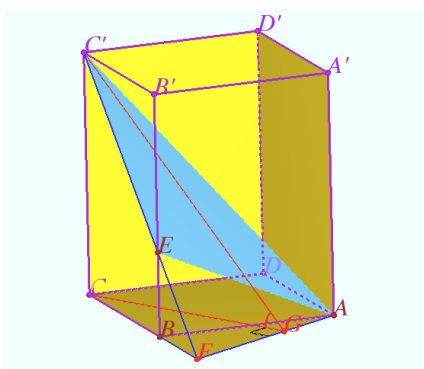
3. Дана последовательность $x_n = \left\{ \frac{a^n}{n!} \right\}, n=0, 1, \dots$. Найдите наибольший член последовательности, если $a > 0$.

4. Открытый бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда, глубину 200 см и высоту бортика над поверхностью воды 25 см. Внезапно ночью ударил мороз и за ночь на поверхности воды образовался ровный слой льда толщиной 20 см. Считая, что вода не испарялась, плотность льда составляет 90% от плотности воды, найдите в сантиметрах расстояние от верхней кромки льда до бортика.

5. Вычислите: $\sqrt{15 - 4\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}} + \sqrt{3}$.

6. Докажите, что геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек A и B - это плоскость, проходящая через середину AB перпендикулярно AB .

7. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $y = \frac{2^{xa}}{8^x} + 3a^2x - 1$ является нечётной.



8. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A'B'C'D'$ найдите угол между плоскостями AEC' и ABC , если точка E расположена на ребре BB' $AB = a$, $BE = b$, $B'E = c$.

9. Решите уравнение $3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x + 18} - 2|$.

10. В царстве Кощея есть четыре источника с водой, которая по вкусу и виду ничем не отличается от обычной водки, но обладает такими свойствами: если человек выпьет воду любого из этих источников, то через 5 минут он умирает, если в течение этого времени не примет противоядия. Противоядием для воды из источника 1 является вода из источников 2, 3 и 4, для воды из источника 2 - вода из источников 3 и 4. Для воды из источника 3 - вода из источника 4. Для воды из источника 4 нет противоядия. После того, как вода подействовала, как противоядие, обе выпитые воды на

существо никак не действуют – их действие компенсируется. Если выпить последовательно два стакана воды с одним номером, то результат тот же, как если выпить эту воду один раз. Если после воды с большим номером выпить воду с меньшим номером, но не простую водку, то существо умирает. Конечно, если ранее выпитая вода подействовала, как противоядие, этого не происходит. К воде из источников 1, 2 и 3 имеют доступ все, воду из источника 4 может добыть только Кощей. Ваня вызвал Кощея на дуэль. По условию, Ваня и Кощей сидят в укрытиях перед дуэлью. Они имеют доступ к воде. В момент дуэли, они должны выйти из своих укрытий, обменяться стаканами с жидкостью, выпить её тут же и вернуться в укрытия. Найти оптимальную стратегию Вани. Учтите, что шпионы Кощея могут подглядывать за его действиями! Более того, с помощью машины времени Кощей может заглядывать на 10 минут вперёд.