Задания 1 – 5

Задание 5

1. Решите уравнение: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x-7}=\sqrt{3x-5}+\sqrt{5x-9}$.

2. Найдите множество значений функции $y = 4\cos(\pi x) + 3\cos x$.

3. Решите уравнение: $(5-2\sqrt{2})^x+(5+2\sqrt{2})^x=10^x$.

4. В прямоугольном параллелепипеде две грани с общим ребром покрасили в зелёный цвет, остальные – в жёлтый. Площадь жёлтых граней равна 120. Желтые грани, которые имеют с зелёными по два общих ребра, являются квадратами. Найдите наименьшее значение суммы длин всех рёбер параллелепипеда, исключая общее ребро красных граней.

5. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

6. Про положительные числа *a, b, c* известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>a+b+c$. Докажите, что $a+b+c>3abc$.

7. Тангенсы углов треугольника—натуральные числа. Чему они могут быть равны?

8. Найдите длину медианы треугольника со сторонами *a, b, c*.

9. Пусть *a, b, c,d* —целые числа, не равные нулю. Назовем глупыми числа вида $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, а умными числа вида $\sqrt{c+d\sqrt{31}}$. Докажите, что умное число может равняться сумме нескольких глупых.

10. Внутри плоского угла с вершиной *A* расположена окружность. Через точку *M* этой окружности проведена прямая, касающаяся окружности и пересекающая стороны угла в точках *B* и *C*. Найти условие, при котором площадь треугольника *ABC* будет наименьшей.

a. Внутри трёхгранного угла с вершиной *A* расположена сфера. Через точку *M* этой сферы проведена плоскость, касающаяся сферы и пересекающая рёбра угла в точках *B, C* и *D*. Найти условие, при котором объём пирамиды *ABCD* будет наименьшей.

Задание 4

1. Решите уравнение: $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}+4=42\frac{1}{4}$. .

2. В уездном городе *M* в метро запрещено провозить предметы, длина, ширина или высота которых превышают 1 м. Как в этом городе можно провезти в метро лыжи длиной 1 м 70 см.

3. Семья (папа, мама, сын и бабушка) ночью подошла к мосту, способному выдержать только двух человек одновременно. По мосту можно двигаться только с фонариком. Известно, что папа может перейти мост за одну минуту, мама – за две, сын – за пять и бабушка – за десять минут. Фонарик у них один. Светить издали нельзя. Если по мосту идут двое, время перехода определяется более медленным членом семьи. Как семье переправиться через мост за 17 минут?

4. Для каждого неотрицательного числа $\boldsymbol{a}$ рассмотрим уравнение: $\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{ax} - \boldsymbol{a}^3 - 29 = 0$. Пусть $\boldsymbol{x}_0$ – положительный корень этого уравнения. Найдите наименьшее значение $\boldsymbol{x}_0$?

5. Доказать, что прямая, делящая пополам площадь и периметр описанного многоугольника, проходит через центр вписанной в этот многоугольник окружности.

6. В каждом классе некоторой школы одинаковое число парт. Парты с одного этажа можно перевезти на грузовике по 5 штук, причём на последний рейс останется 2 парты. Парты с другого этажа можно перевезти на другом грузовике по 7 штук, причём на последний рейс останется 4 парты. Второй грузовик при этом сделает на один рейс больше. Найти число парт в каждом классе этой школы.

7. Найти выпуклый многоугольник, который не имеет ни оси симметрии, ни центра

симметрии, но который переходит в себя при повороте вокруг некоторой точки на некоторый угол, меньший 180°.

8. Расстояния от точки внутри прямоугольника до трёх его вершин равно 10, 13 и 15. Найти наибольшее возможное расстояние от этой точки до четвёртой вершины прямоугольника.

9. Решите уравнение: $|x-a+1|+|x-2a|=x$.

10. Докажите, что для любого треугольника *ABC* расстояние *AH* от вершины до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны *BC*.

Задание 3

1. Известно, что ***угол между скрещивающимися прямыми*** считается равным углу между любыми двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным прямым. Докажите, что это определение угла корректно.

2. Уравнение $\sqrt{n+\sqrt{n+..+\sqrt{n}}}=m$ содержит $k\geq 2$ последовательно извлекаемых корней. Решить уравнение в целых числах, то есть найти все возможные значения *k, m* и *n*. (тема **4**)

3. Расстояния от некоторой точки M до вершин треугольника ABC равны соответственно $a\geq b\geq c$. Найдите наибольшую возможную площадь треугольника, если *a* = 10, *b* = 5, *c* = 3.

4. Упростите выражение $\sqrt[3]{3+\frac{11\sqrt{6}}{9}}+\sqrt[3]{3-\frac{11\sqrt{6}}{9}}$.

5. Найдите значение параметра *a*, при котором наибольшее значение функции: $f(x,a)=-x^2+(20a+16)x-95a^2-177a+33$ минимально.

6. В трапеции ABCD с основанием AD = b = 8 диагонали пересекаются в точке E. Около треугольника BCE описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F, причём AF = a = 5. Найдите EF.

7. Все плоские углы при вершине ***A*** тетраэдра ***ABCD*** прямые. ***AB = AC = AD***√2. Найдите двугранные углы тетраэдра.

8. Решите уравнение: $\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}$, где *a* = 5.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases}6\cos x+4\cos y=5,\\ 3\sin x+2\sin y=0.\end{cases}$

10. Для каждого натурального *n* найти наибольшее значение П, которое принимает произведение натуральных чисел, сумма которых равна *n*.

Задание 2

1. Решить уравнение $5x^2+3z^2-2yz+y^2=30$ в целых числах. (тема **4**)

2. Поле, площадь которого не меньше, чем 6 соток, имеет вид треугольника одна из сторон которого не длиннее 30 м, а другая не длиннее 40 м. Вокруг поля идёт узкая кольцевая дорога. Найти её радиус.(тема **3**)

3. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x,y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $2|x+2|+|y|+|2x-y|=4$. (тема **3**)

4. При положительных x решите уравнения $x^x=4$ и $x^x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. (тема **6**)

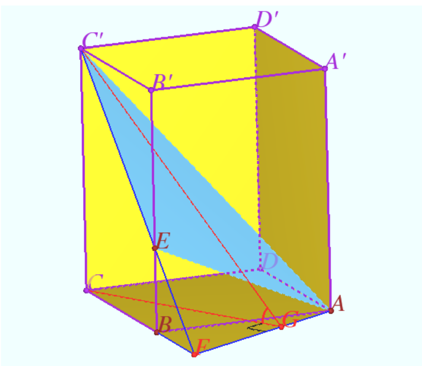
5. В треугольнике ABC со стороной AC = 8 проведена биссектриса BE. Известно, что площади треугольников ABE и CBE относятся как 3 : 1. Найдите биссектрису при которой высота, опущенная из вершины B на основание наибольшая. (тема **3**)

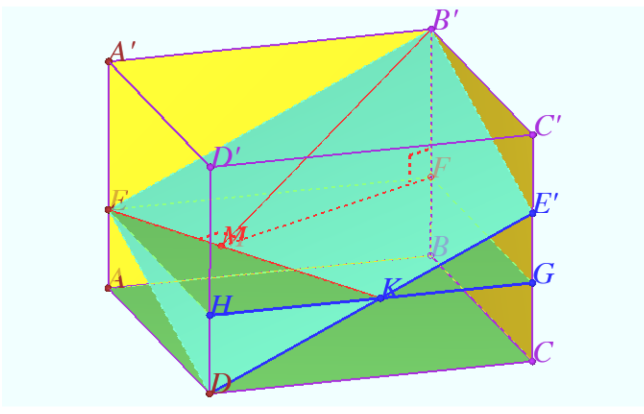
6. Коля написал на доске многозначное число и утверждал, что у него ровно 49 делителей (включая 1 и само число). Вася это отрицает. Дежурный стер почти все число и осталось только несколько первых и последних цифр: 45...7256. Сможет ли учитель выяснить, кто из ребят прав?

7. В треугольнике ABC ∠B = 60°, AE и CF высоты, D - середина AC. Найдите ∠DEF.
8. В выражении $(2x^3-3y^2)^{33}$ найдите сумму коэффициентов и выражение, содержащее наибольший по модулю коэффициент.
9. Найти минимальное значение параметра *a,* при котором всегда выполняется неравенство: $a^2x^2 + y^2 + z^2 \geq ayz + xy + xz$.
10. Найти максимум и минимум выражения $x^2 - xy + 2y^2$ при условии: $3x^2 - 2xy + 4y^2 = 19$.

Задание 1

1. Решить уравнение $3x^2+5xy+2y^2=7$ в целых числах.
2. Корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$ являются числа 3, 7 и 2012. Найдите b.
3. Дана последовательность $x_n=\{\frac{a^n}{n!}\}, n=0,1,....$ Найдите наибольший член последовательности, если $a>0$.
4. Открытый бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда, глубину 200 см и высоту бортика над поверхностью воды 25 см. Внезапно ночью ударил мороз и за ночь на поверхности воды образовался ровный слой льда толщиной 20 см. Считая, что вода не испарялась, плотность льда составляет 90% от плотности воды, найдите в сантиметрах расстояние от верхней кромки льда до бортика.
5. Вычислите: $\sqrt{15-4\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{3}}$.
6. Докажите, что геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек A и B - это плоскость, проходящая через середину AB перпендикулярно AB.
7. Найдите все значения *a*, при каждом из которых функция $y=\frac{2^{xa}}{8^x}+3a^2x-1$ является нечётной.





8. В правильной четырёхугольной призме ***ABCDA'B'C'D'*** найдите угол между плоскостями ***AEC'*** и ***ABC,*** если точка ***E*** расположена на ребре ***BB'*** $AB=a, BE=b, B'E=c.$
9. Решите уравнение $3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2|\sqrt{3x+18}-2|$.
10. В царстве Кощея есть четыре источника с водой, которая по вкусу и виду ничем не отличается от обычной водки, но обладает такими свойствами: если человек выпьет воду любого из этих источников, то через 5 минут он умирает, если в течение этого времени не примет противоядия. Противоядием для воды из источника 1 является вода из источников 2, 3 и 4, для воды из источника 2 – вода из источников 3 и 4. Для воды из источника 3 – вода из источника 4. Для воды из источника 4 нет противоядия. После того, как вода подействовала, как противоядие, обе выпитые воды на

существо никак не действуют – их действие компенсируется. Если выпить последовательно два стакана воды с одним номером, то результат тот же, как если выпить эту воду один раз. Если после воды с большим номером выпить воду с меньшим номером, но не простую водку, то существо умирает. Конечно, если ранее выпитая вода подействовала, как противоядие, этого не происходит. К воде из источников 1, 2 и 3 имеют доступ все, воду из источника 4 может добыть только Кощей.
Ваня вызвал Кощея на дуэль. По условию, Ваня и Кощей сидят в укрытиях перед дуэлью. Они имеют доступ к воде. В момент дуэли, они должны выйти из своих укрытий, обменяться стаканами с жидкостью, выпить её тут же и вернуться в укрытия. Найти оптимальную стратегию Вани. Учтите, что шпионы Кощея могут подглядывать за его действиями! Более того, с помощью машины времени Кощей может заглядывать на 10 минут вперёд.