Системы счисления и их использование при решении олимпиадных задач

Известно, что:

Существует теорема о том, что любое натуральное число можно записать в любой системе счисления единственным образом.

Для того, чтобы преобразовать данное число в систему счисления с основанием *n* нужно это число делить на *n* и записывать остатки. Они выделены жирным шрифтом. Запись числа в системе счисления с основанием *n* содержит последний результат деления и остатки, записанные в порядке, обратном их появлению. Например:

25 : 2 = 12 (остаток **1**),	25 : 3 = 8 (остаток **1**),
12 : 2 = 6 (остаток **0**),	8 : 3 = **2** (остаток **2**),
6 : 2 = 3 (остаток **0**),	
3 : 2 = **1** (остаток **1**),	

$$25 = 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 16 + 8 + 1, \text{ то есть } 25 = 11001_2.$$

$$25 = 2\cdot3^2 + 2\cdot3^1 + 1\cdot3^0 = 18 + 6 + 1, \text{ то есть } 25 = 221_3.$$

Стихотворение о двенадцатилетней пятикласснице:

Ей было 1100 лет.
Она в 101 класс ходила.
В портфеле по 100 книг носила.
Всё это правда, а не бред.
Когда пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.

Задание 1. Запишите свой день и месяц рождения в двоичной, троичной и 16-ричной системе счисления.

Метод деления совокупности объектов ***на равные части*** часто сводит различные задачи к переводу чисел в двоичную или троичную системы счисления. Метод характеризует стишок, пародирующий чёрный английский юмор:

Несчастный случай! Ваш слуга убит!
Он надвое разрезан, мистер Смит!
Ну что ж, тогда любезность окажите,
Ту половину, где ключи, пришлите.

Задание 2. *Жители пункта А – правдуны. Они всегда говорят правду. Жители соседнего В – лжецы, они всегда врут. И те, и другие незнакомым говорят только «да» или «нет». Вы находитесь в одном из этих пунктов и имеете собеседника. Каково минимальное число вопросов для выяснения, в каком пункте Вы находитесь и кто Ваш собеседник?*

Задание 3. *Жители пункта А – правдуны, жители В – лжецы, жители С – нормалы, они могут сказать правду, а могут и соврать. Все они незнакомым говорят только «да» или «нет». Каково минимальное число вопросов для выяснения, в каком пункте Вы находитесь и кто Ваш собеседник?*

Задание 4. *Задумано целое число от 0 до 15, которое Вам требуется узнать. Для выяснения этого числа Вы можете задавать любые вопросы, на которые получите правдивый ответ «Да» или «Нет». Найдите наименьшее число вопросов для определения числа.*

Задание 5. *Задуманы два разных натуральных числа не превосходящих 23, которые Вам требуется узнать. Для выяснения этих чисел, Вы можете задавать любые вопросы, на которые получите правдивый ответ «Да» или «Нет». Сколько требуется вопросов?*

Задание 6. *Имеется 27 монет одного достоинства среди которых одна фальшивая (лёгкая). Сколько необходимо взвешиваний на чашечных весах без гирь, чтобы выявить эту монету?*

Задание 7. *Имеется 12 монет одного достоинства среди которых одна фальшивая. Сколько необходимо взвешиваний на чашечных весах без гирь, чтобы выявить эту монету и указать, легче она или тяжелее, чем настоящая?*
Задание 8. *Задумано целое число от 0 до 15, которое требуется узнать. Для выяснения этого числа Вы можете задавать любые вопросы, на которые получите ответ «Да» или «Нет». Один ответ может быть лживым. Сколько требуется вопросов?*
Задание 9. *Игра «Шоколадка» Шоколадка имеет вид прямоугольника $X\times Y$, разбитого на единичные клетки. Долька (х; у) испорчена. За один ход можно разломить шоколадку на две части по прямой (границе клеток) и удалить (съесть) одну часть. Проигрывает тот, кому достанется испорченная долька.*

Выберите размеры шоколадки и положение порченой дольки. Чтобы начать игру, перейдите на следующий шаг и нажмите «Начать». Первый ход сделает компьютер. Далее он ходит при нажатии «Комп». Чтобы сделать ход, установите горизонтальную или вертикальную линию разлома (кнопка с метками ↑ и →) и её положение (смещение активной точки слева или вверху) и нажмите кнопку «Ломать».
Задание 10. *На чашечных весах требуется взвесить объекты, вес которых составляет целое число граммов от 1 до* $2^n - 1 = 31$ $(n = 5)$. *Какое минимальное количество гирь позволит выполнить любое взвешивание, если гири можно класть только на одну чашу весов.*

Задание 11. *На чашечных весах требуется взвесить объекты, вес которых составляет целое число граммов. Какое минимальное количество гирь позволит выполнить любое взвешивание, если максимальный вес* $13=\dfrac{3^n-1}{2}, n=3.$

Задание 12. Имеются шесть нумерованных гирь одинакового вида, но разного заранее известного веса 1, 2, 3, 4, 5 и 6 грамм, причём на каждом объекте наклеена этикетка, и чашечные весы, позволяющие точно установить равенство веса групп объектов, положенных на чаши. Имеется гипотеза о том, что надписи соответствуют фактическим весам. Доказать, что для проверки гипотезы достаточно двух взвешиваний.

Задание 13. Игра Ним – Мизер. *В начальный момент некоторое число объектов раскладывается в некоторое количество кучек. Игроки по очереди забирают один или несколько объектов из любой, но только одной кучки. Выигрыш связан только с последним элементом. Выигрывает в игре Ним (проигрывает в игре Мизер) тот, кто возьмет последний объект.* Выберите количество рядов и число предметов в них. Чтобы начать игру, нажмите «Начать». Первый ход сделает компьютер. Далее он ходит при нажатии на кнопку «Комп». Чтобы сделать ход, пользуясь красной точкой установите ряд из которого берёте предметы и их число и нажмите «Взять».

Задания для самопроверки:

1. Имеется 6 одинаковых с виду монет, часть из которых фальшивые – более лёгкие, и чашечные весы без гирь. Все фальшивые весят одинаково. Найти минимальное число взвешиваний, позволяющих установить все фальшивые.

2. При каком наибольшем n на шахматной доске можно расставить n ферзей, n королей и n слонов так, чтобы ни одна фигура не била другую.

3. Чиновники, имеющие разную зарплату, сидят на креслах, расставленных в виде квадрата $2n\times 2n$. Чиновник считает себя высокооплачиваемым, если из его ближайших соседей (спереди, сзади, сбоку и по диагоналям) не более одного, имеющего более высокую оплату. Какое наибольшее число высокооплачиваемых чиновников может сидеть в креслах.

4. В клетках таблицы 7×7 расставлены числа 0, 1 и – 1 так, что в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна нулю. Найти наибольшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.