Системы счисления и их использование при решении олимпиадных задач

Известно, что:

Существует теорема о том, что любое натуральное число можно записать в любой системе счисления единственным образом.

Для того, чтобы преобразовать данное число в систему счисления с основанием *n* нужно это число делить на *n* и записывать остатки. Они выделены жирным шрифтом. Запись числа в системе счисления с основанием *n* содержит последний результат деления и остатки, записанные в порядке, обратном их появлению. Например:

25 : 2 = 12 (остаток **1**),
12 : 2 = 6 (остаток **0**),
6 : 2 = 3 (остаток **0**),
3 : 2 = **1** (остаток **1**),

25 : 3 = 8 (остаток **1**),
8 : 3 = **2** (остаток **2**),

$$25 = 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 16 + 8 + 1, \text{ то есть } 25 = 11001_2.$$

$$25 = 2\cdot3^2 + 2\cdot3^1 + 1\cdot3^0 = 18 + 6 + 1, \text{ то есть } 25 = 221_3.$$

Стихотворение о двенадцатилетней пятикласснице:

Ей было 1100 лет.
Она в 101 класс ходила.
В портфеле по 100 книг носила.
Всё это правда, а не бред.
Когда пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.

Задание 1. Запишите свой день и месяц рождения в двоичной, троичной и 16-ричной системе счисления.

Метод деления совокупности объектов ***на равные части*** часто сводит различные задачи к переводу чисел в двоичную или троичную системы счисления. Метод характеризует стишок, пародирующий чёрный английский юмор:

Несчастный случай! Ваш слуга убит!
Он надвое разрезан, мистер Смит!
Ну что ж, тогда любезность окажите,
Ту половину, где ключи, пришлите.

Задание 2. *Жители пункта А – правдуны. Они всегда говорят правду. Жители соседнего В – лжецы, они всегда врут. И те, и другие незнакомым говорят только «да» или «нет». Вы находитесь в одном из этих пунктов и имеете собеседника. Каково минимальное число вопросов для выяснения, в каком пункте Вы находитесь и кто Ваш собеседник?*

Решение. Возможны $4 = 2^2 = 100_2$ события. Вы в пункте А, собеседник правдун, ситуация АП. Вы в В и перед Вами лжец, ситуация ВЛ. Возможны ещё АЛ и ВП. Разумный вопрос даёт один информативный ответ «да» или «нет», то есть может разделить ситуации на две группы, n вопросов дают 2^n групп. Значит, требуемое количество вопросов не менее, чем 2. Вопрос, позволяющий отделить правдуна от лжеца, – это вопрос, ответ на который Вы знаете и без него. Например, «Светит ли сейчас Солнце?» или «Вы стоите на ногах?». Вопрос, позволяющий выяснить, где Вы: «Живёте ли Вы в этом городе?» Если Вы в А, то оба ответят «Да», если в В, то «Нет».

Задание 3. *Жители пункта А – правдуны, жители В – лжецы, жители С – нормалы, они могут сказать правду, а могут и соврать. Все они незнакомым говорят только «да» или «нет». Каково минимальное число вопросов для выяснения, в каком пункте Вы находитесь и кто Ваш собеседник?*

Число возможных ситуаций $9 > 2^3$: АП, АЛ, АН, ВП, ВЛ, ВН, СП, СЛ, СН. Значит, необходимо по крайней мере 4 вопроса. Однако, дают ли Вам информацию ответы нормала? Нет, так как он может отвечать что угодно, в частности, имитировать и правдуна, и лжеца. Поэтому в логических задачах обычно рассматривают ненормального нормала, который говорит правду и лжёт строго через раз. Если Вы знаете, что имеете дело с лжецом или правдуном, то его ответ информативен. Если Вы беседуете с нормалом, необходимо дополнительно знать, когда он говорит правду. Рассмотрим систему из четырёх вопросов:

1) Верно ли, что я в A или в B?
2) Верно ли, что я в C?
3) Живёте ли Вы в C?
4) Верно ли, что я в A?

Смысл первых вопросов в отделении нормала. И лжец, и правдун на них дадут разные ответы, два одинаковых ответа может дать только нормал, житель C. Третий вопрос - контрольный. Если перед Вами правдун, он ответит «нет», если лжец, то ответом будет «да», если нормал, то Вы узнаете его «состояние». Если нормал ответит «да», он правдив в нечётных ответах, если «нет», то в чётных. Зная всё о собеседнике, Вы по ответам на первые вопросы знаете, где Вы, во всех случаях кроме беседы с нормалом в A или B. Для уточнения нужен последний вопрос.

Задание 4. *Задумано целое число от 0 до 15, которое Вам требуется узнать. Для выяснения этого числа Вы можете задавать любые вопросы, на которые получите правдивый ответ «Да» или «Нет». Найдите наименьшее число вопросов для определения числа.*

Для удобства понимания метода, «подозреваемые» числа собраны в таблицу:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Первый возможный вопрос: Это число больше 7? Если ответ «Да» – оно в нижней половине таблицы, иначе оно в верхней половине. Если первый ответ был «Да», то второй вопрос: Это число больше 11? Он позволяет выбрать группу из четырёх чисел, являющуюся третьей или четвёртой строкой в таблице. Следующий вопрос определит половину строки и четвёртый – искомое единственное число. Стратегия деления пополам позволяет найти один объект из не более, чем 2^n объектов за n вопросов. Конечно, вопросы можно формулировать по-разному. Например: Является ли задуманное число чётным? Если «Да», то следующий вопрос: Делится ли оно на 4? Важно следующее.

Во-первых, число подозреваемых должно сокращаться на каждом этапе вдвое, а во-вторых, отгадывающему должно быть достаточно удобно обрабатывать поступающую информацию. Например, если задуманное число нечётное, второй вопрос уже более сложен. Итак, для решения такой задачи требуется не более n = 4 вопросов.

Таблица для поиска числа в диапазоне от 0 до 15, имеет вид:

0000(0)	0001(1)	0010(2)	0011(3)
0100(4)	0101(5)	0110(6)	0111(7)
1000(8)	1001(9)	1010(10)	1011(11)
1100(12)	1101(13)	1110(14)	1111(15)

В двоичной системе задаваемые вопросы резко упрощаются. Например, j-ый вопрос может звучать так: Является ли j-ая цифра единицей? Каждый такой вопрос даёт одну цифру двоичной записи числа. Для числа 5, например, ответы будут «Нет», «Да», «Нет», «Да», то есть 0101 = 5.

Задание 5. *Задуманы два разных натуральных числа не превосходящих 23, которые Вам требуется узнать. Для выяснения этих чисел, Вы можете задавать любые вопросы, на которые получите правдивый ответ «Да» или «Нет». Сколько требуется вопросов?*
Требуемое количество информации определяется числом возможных комбинаций чисел. Первое может быть выбрано 23 способами, второе – 22 (одно число уже выбрано), порядок не существенен, значит, число способов задумать пару чисел равно ½ ×23 × 22 = 253 < 2^8. Требуется не менее 8 вопросов. Один из способов построения простой системы вопросов состоит в нумерации всех возможных комбинаций. Пусть паре 1-2 присвоен двоичный номер из восьми цифр 00000001, паре 1-3 номер 00000010, и так далее до 22-23 двоичный номер которого 11111100 соответствует двоичной записи числа 253 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4. Если задать восемь вопросов о том, является ли единицей соответствующая цифра, построим искомую комбинацию. Например, пусть задумана комбинация 1-13 (номер в списке 13 = 1101). Тогда Вы получите ответы «нет», «нет», «нет», «нет», «да», «да», «нет», «да».

Задание 6. *Имеется 27 монет одного достоинства среди которых одна фальшивая (лёгкая). Сколько необходимо взвешиваний на чашечных весах без гирь, чтобы выявить эту монету?*
Требуемое количество информации определяется числом возможных исходов экспериментов по поиску фальшивой монеты, равным числу монет $27 = 3^3 = 1000_3$. Взвешивание даёт три разных исхода (весы в равновесии, перевешивает левая чаша, перевешивает правая чаша). При организации взвешиваний обеспечиваем равное число возможностей в группе. Делим монеты на три группы по девять и сравниваем веса двух групп. Фальшивая монета или в более легкой группе из двух взвешиваемых или (при равновесии) в третьей, которую не взвешивали. Найденную девятку монет разбиваем на три тройки и повторяем взвешивание. Найденную тройку разбиваем на три отдельных монеты.

Задание 7. *Имеется 12 монет одного достоинства среди которых одна фальшивая. Сколько необходимо взвешиваний на чашечных весах без гирь, чтобы выявить эту монету и указать, легче она или тяжелее, чем настоящая?*
Число возможных исходов $24 = 2\cdot3^2 + 2\cdot3^1 = 220_3 < 1000_3$, так как фальшивая монета одна из 12 и она может быть как легче, так и тяжелее настоящей: фальшивая первая тяжёлая, фальшивая первая лёгкая, фальшивая вторая тяжёлая,… Минимальное число взвешиваний 3.

Способ 1. При организации взвешиваний стремимся к равному числу исходов. Делим монеты на три группы по четыре монеты и сравниваем веса двух групп. Если весы остались в равновесии, фальшивая среди четырёх оставшихся, не известно, лёгкая она или тяжелая. Количество исходов $2 \times 4 = 8 < 9 = 100_3$. Если левая чаша тяжелее, то либо фальшивая тяжёлая и среди четырёх тяжёлых, либо лёгкая среди четырёх легких. Всего исходов $4 + 4 = 8 < 9 = 100_3$ Рассмотрим первый случай, когда «подозрительных» монет 4. Пусть для взвешивания взяты две «подозрительные» монеты. Если весы останутся в равновесии, то для двух оставшихся монет возможны 4 > 3 вариантов — решения нет.
Пусть для взвешивания взяты три «подозрительные» монеты на одной чашке и три настоящих на другой.
Пусть перевесила чаша с «подозрительными» монетами. Имеем 3 возможности: первая тяжелая фальшивая, вторая тяжелая фальшивая, третья тяжелая фальшивая. Последним взвешиванием сравним две «подозрительные». Если одна тяжелее, она фальшивая. Иначе фальшивая – третья монета.
Пусть перевесила чаша с настоящими монетами. Действуем аналогично.

Пусть весы в равновесии. Две возможности для единственной «подозреваемой» монеты. Сравниваем её с настоящей и устанавливаем, легче она или тяжелее.
Пусть для взвешивания взяты две «подозрительные» монеты на одной чашке и одна (плюс одна настоящая) на другой. Вновь решение можно построить.

Способ 2. Покажем, как можно идентифицировать объекты за три взвешивания. Воспользуемся троичной системой счисления с цифрами (+) – левая чаша весов перевесила, (=) – равновесие, (–) – правая чаша весов перевесила. Объекты 1, 2 и 3 положим на весы по одному разу в первом, втором и третьем взвешивании, причём 2 – на правую чашу, 1 и 3 – на левую. Тогда:

(+ = =) – 1Т, (– = =) – 1Л, (= – =) – 2Т, (= + =) – 2Л, (= = +) – 3Т, (= = –) – 3Л.

Объекты 4, 5 и 6 положим на весы по три раза, причём 4 – на левую чашу, 5 – один раз на правую, а 6 один раз на левую. Тогда:

(+ + +) – 4Т, (– – –) – 4Л, (+ + –) – 5Л, (– – +) – 5Т, (– + –) – 6Т, (+ – +) – 6Л.

Объекты 7 – 12 кладём по 2 раза на чаши каждый:

(– = –) – 7Т, (+ = +) – 7Л, (+ – =) – 8Т, (– + =) – 8Л, (= – +) – 9Т, (= + –) – 9Л, (= – –)–10Т, (= + +)–10Л, (++=)–11Т, (– – =) –11Л, (– = +) –12Т, (+= –) –12Л.

Три взвешивания таковы: 4, 5, 8, 11– 1, 6, 7, 12;
4, 5, 6, 11–2, 8, 9, 10;
3, 4, 9, 12–5, 6, 7, 10

Задание 8. *Задумано целое число от 0 до 15, которое требуется узнать. Для выяснения этого числа Вы можете задавать любые вопросы, на которые получите ответ «Да» или «Нет». Один ответ может быть лживым. Сколько требуется вопросов?*
Число вариантов $16 = 2^4$ — нужно $4 = 2^2$ вопроса. Один из них может быть неверным, поэтому необходимо ещё 2 вопроса. Один из них может быть неверным. Нужен ещё один вопрос. Число вопросов не менее, чем семь.
Задаём три вопроса о трёх цифрах искомого числа в двоичной системе. Далее задаём контрольный вопрос, связанный со всеми уже заданными. Например, известны цифры 101. Вопрос: «Является ли истинная сумма «узнанных» трёх цифр чётной?» Если ответ совпадает с ожидаемым (в данном случае «Да»), то все четыре ответа правдивы. Если не совпадает, то ложь уже произошла и дальнейшие ответы будут правдивы.
В первом случае трёх вопросов достаточно, чтобы узнать одну последнюю цифру. Во втором случае четыре возможности для лжи. Ищем ложь методом деления пополам. Например, возможен вопрос: «Является ли истинная сумма двух первых цифр нечётной?» Если ответ совпадает с ожидаемым (в данном случае «Да»), то правдивы два первых ответа и нужно шестым вопросом узнать третью цифру. Если ответ свидетельствует о лживости одной из двух первых цифр, шестым вопросом проверяем любую из них. Если она подтверждается, меняем оставшуюся. Понятно, что седьмой вопрос о последней цифре.

Задание 9. *Игра «Шоколадка» Шоколадка имеет вид прямоугольника X×Y, разбитого на единичные клетки. Долька (x; y) испорчена. За один ход можно разломить шоколадку на две части по прямой (границе клеток) и удалить (съесть) одну часть. Проигрывает тот, кому достанется испорченная долька.*

Выберите размеры шоколадки и положение порченой дольки. Чтобы начать игру, перейдите на следующий шаг и нажмите «Начать». Первый ход сделает компьютер. Далее он ходит при нажатии «Комп». Чтобы сделать ход, установите горизонтальную или вертикальную линию разлома (кнопка с метками ↑ и →) и её положение (смещение активной точки слева или вверху) и нажмите кнопку «Ломать».

Задание 10. *На чашечных весах требуется взвесить объекты, вес которых составляет целое число граммов от 1 до* $2^n - 1 = 31$ ($n = 5$). *Какое минимальное количество гирь позволит выполнить любое взвешивание, если гири можно класть только на одну чашу весов.*

Решение: Комплект, содержащий *n* гирь (1, 2, 4, 8 …2^{n-1}) решает задачу. Действительно, запишем вес объекта в двоичной системе. Например, $13 = 1101_2$. Используем те гири, которым соответствуют единицы в записи числа: $2^0 = 1$, $2^2 = 4$ и $2^3 = 8$. Любой вес можно взвесить.

Докажем, что комплект, содержащий $n - 1$ гирю не решает задачу. Действительно, с помощью любой одной гири из комплекта на весах можно взвесить $C_{n-1}^1 = n-1$ разных весов. С помощью любых двух гирь можно взвесить $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ разных весов. В так далее. Всего разных весов можно взвесить не более, чем:

$C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1} - 1$ разных весов. *Ответ: n (гири 1, 2, 4, …2^{n-1}).*

Задание 11. На чашечных весах требуется взвесить объекты, вес которых составляет целое число граммов. Какое минимальное количество гирь позволит выполнить любое взвешивание, если максимальный вес $13 = \frac{3^n - 1}{2}, n = 3$.

Решение: Комплект, содержащий *n* гирь (1, 3, 9, …3^{n-1}) решает задачу. Действительно, запишем вес объекта в троичной системе в виде разности чисел, в записи которых только единицы. Например:

$$16 = 121_3 = 1001_3 - 110_3 = 27 + 1 - (9 + 3)$$

Используем на одной чаше весов те гири, которые соответствуют единицы в записи уменьшаемого, а на другой поместим взвешиваемое тело и гири, соответствующие вычитаемому. Любой вес можно взвесить.

Докажем, что комплект, содержащий $n - 1$ гирю не решает задачу. Действительно, каждой гире поставим в соответствие числа:

0 – если гиря не используется;

+1 – гиря на той чаше, где нет взвешиваемого тела;

(–1) – гиря на той же чаше, где взвешиваемое тело.

Всего с помощью этих гирь можно составить 3^{n-1} различных весов, среди которых нулевой вес и пары весов разных знаков. Значит, положительных различных весов не более, чем $\frac{3^{n-1} - 1}{2} = 4, n = 3$.

Ответ: *n* (гири 1, 3, 9, …3^{n-1}).

Задание 12. Имеются шесть нумерованных гирь одинакового вида, но разного заранее известного веса 1, 2, 3, 4, 5 и 6 грамм, причём на каждом объекте наклеена этикетка, и чашечные весы, позволяющие точно установить равенство веса групп объектов, положенных на чаши. Имеется гипотеза о том, что надписи соответствуют фактическим весам. Доказать, что для проверки гипотезы достаточно двух взвешиваний.

Решение: Занумеруем объекты в троичной системе счисления в порядке возрастания веса: 00; 01; 02; 10; 11 и 20. Одно взвешивание может позволить проверить одну цифру этой записи, если результат взвешивания получается единственным образом. Организуем первое взвешивание следующим образом.

На одной чаше разместим три самых лёгких объекта 00; 01; 02. На другой – самый тяжёлый, то есть 20. Равенство возможно в единственном случае, когда первая цифра у всех объектов верная: $1 + 2 + 3 = 6$ (г).

Второе взвешивание. На одной чаше разместим самые лёгкие объекты из уже известных групп с разными первыми цифрами, то есть 00 и 20. На другой – самые тяжёлые: 02 и 12. Первая цифра у всех уже известна. $1 + 6 < 3 + 5$ в единственном случае, если все веса верные. Вторая цифра проконтролирована.

Задание 13*. *Игра Ним – Мизер. *В начальный момент некоторое число объектов раскладывается в некоторое количество кучек. Игроки по очереди забирают один или несколько объектов из любой, но только одной кучки. Выигрыш связан только с последним элементом. Выигрывает в игре Ним (проигрывает в игре Мизер) тот, кто возьмет последний объект.*

Выберите количество рядов и число предметов в них. Чтобы начать игру, нажмите «Начать». Первый ход сделает компьютер. Далее он ходит при нажатии на кнопку «Комп». Чтобы сделать ход, пользуясь красной точкой установите ряд из которого берёте предметы и их число и нажмите «Взять».

Вопросы и задания для самопроверки:

1. Имеется 6 одинаковых с виду монет, часть из которых фальшивые – более лёгкие, и чашечные весы без гирь. Все фальшивые весят одинаково. Найти минимальное число взвешиваний, позволяющих установить все фальшивые.

Ответ: 4.

2. При каком наибольшем n на шахматной доске можно расставить n ферзей, n королей и n слонов так, чтобы ни одна фигура не била другую.

Ответ: 4.

3. Чиновники, имеющие разную зарплату, сидят на креслах, расставленных в виде квадрата $2n \times 2n$. Чиновник считает себя высокооплачиваемым, если из его ближайших соседей (спереди, сзади, сбоку и по диагоналям) не более одного, имеющего более высокую оплату. Какое наибольшее число высокооплачиваемых чиновников может сидеть в креслах.

Ответ: $2n^2$.

4. В клетках таблицы 7×7 расставлены числа 0, 1 и – 1 так, что в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна нулю. Найти наибольшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

Ответ: 11.