Решение уравнений

В этом разделе будут помещены сведения о значительном количестве достаточно разных методов решения различных уравнений. Как правило, метод «заточен» для небольшого количества видов уравнений. Полезно представлять разные методы.

Раздел будет пополняться в течении 2012-2013 учебного года.

Содержание

Полезные сведения

Решение уравнений сводится к тождественным преобразованиям выражений, стоящих слева и справа от знака равенства. Преобразования считаются тождественными и между последовательно расположенными уравнениями ставится знак эквивалентности $У_1 \Leftrightarrow У_2$ тогда и только тогда, когда все корни уравнения $У_1$ являются корнями уравнения $У_2$ и, наоборот, все корни уравнения $У_2$ являются корнями $У_1$. Тождественными преобразованиями являются операции сложения, вычитания, умножения или деления на не равное нулю число, возведение в нечётную степень. Если все преобразования эквивалентны и решение сопровождают (обосновано!) символы $\Leftrightarrow$, то решение уравнения не требует проверки. Любопытно, что все уравнения, у которых нет корней (то есть число корней равно нулю), эквивалентны между собой:

$$x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2.$$

Знак следования $У_1 \Rightarrow У_2$, то есть из $У_1$ следует $У_2$, но из $У_2$ не обязательно следует $У_1$. В записи решения он используется для обозначения того факта, что все корни выражения $У_1$ являются корнями выражения $У_2$, но корнями выражения $У_2$ могут быть также числа, которые не являются корнями $У_1$. Этот знак сопровождает, например, возведение в квадрат обеих частей уравнения, если про знаки левой или правой части нет достоверных сведений. Или взятие синуса от обеих частей уравнения. Если при записи решения появился хотя бы один такой знак, ответы необходимо проверять подстановкой в исходное уравнение.

Знак системы, например, $\begin{cases} x=2, \\ x>1, \end{cases}$ применяется для того, чтобы указать, что выполняются одновременно все указанные соотношения, то есть в примере $x = 2$. Знак объединения $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x>1, \end{array}\right.$ свидетельствует о том, что выполняется хотя бы одно из выражений, в примере $x > 1$. Использование этих знаков достаточно рискованно. При недостатке опыта лучше пользоваться словами.

ОДЗ – область допустимых значений переменных в выражениях, составляющих уравнение. *ОВР* – область возможных решений, то есть та часть *ОДЗ*, в которой решение может существовать. Например, в уравнении $\sqrt{2x+6}=9-x$, *ОДЗ* $x\in[-3; +\infty)$, а *ОВР* $x\in[-3; 9]$, так как при больших значениях x выражения существуют, но знаки частей разные и равенство невозможно. В *ОВР* операция возведения в квадрат становится эквивалентным преобразованием.

$\varnothing$ – пустое множество, знак того, что уравнение не имеет корней.

При записи решения полезен метод «дележа пирога» в котором ОДЗ разбивается на удобные части и каждая исследуется отдельно. Например, решаем уравнение $|x - 3| = 2$. Надо рассмотреть случаи $x \geq 3$ и $x < 3$. В момент перехода в работах учеников встречаются неверные записи вида: «$|x - 3| < 0$ …», когда решающий подразумевает, что $x - 3 < 0$. Удобно записать: «Пусть $x < 3$» и далее выполнить все преобразования именно при таком иксе. Правила математики это разрешают.

Полезно начиная решение оговорить ОДЗ. Дело в том, что вне ОДЗ многие преобразования оказываются бессмысленными. Например, преобразовывать уравнение, содержащее выражение $\sqrt{\dfrac{a-x}{x-2a}}$ при $a = 0$ бессмысленно, так как не существует ни одного решения уравнения, содержащее это выражение. Запись $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$ не верна при $x = -3$.

Разберём методы решения на примере простейшей задачи. Каждое из приведенных решений является математически корректным, но только первое требует обязательной проверки.

Задание 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+6}=9-x$.

Решение: *Способ* 1. ОДЗ уравнения $x\in[-3;\ +\infty)$. Возведём уравнение в квадрат: $\sqrt{2x+6}=9-x \ \Rightarrow\ 2x + 6 = x^2 - 18x + 81 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 20x + 75 = 0 \Leftrightarrow\ (x - 5)\cdot(x - 15) = 0$. Проверка для $x = 5$: $\sqrt{2\cdot 5+6}=4=9-5$. Проверка для $x = 15$: $\sqrt{2\cdot 15+6}=6\neq 9-15$.. *Ответ*: 5.

Способ 2. ОДЗ уравнения $x\in[-3;\ +\infty)$. ОВР (область возможных решений): $9 - x \geq 0$. Далее рассматриваем только $x\in[-3;\ +9]$. Возведём уравнение в квадрат: $\sqrt{2x+6}=9-x \ \Leftrightarrow$ $2x + 6 = x^2 - 18x + 81 \Leftrightarrow\ x^2 - 20x + 75 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)\cdot(x - 15) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$. Все преобразования эквивалентны – проверка не требуется.

Ответ: 5.

Способ 3. ОДЗ уравнения $x\in[-3;\ +\infty)$. Всюду в ОДЗ выражение, стоящее в левой части возрастает, выражение, стоящее в правой – убывает. Значит количество корней не более, чем один. Подбором устанавливаем, что $x = 5$ – корень уравнения.

Ответ: 5.

Способ 4. ОДЗ уравнения $x\in[-3;\ +\infty)$. Пусть $t=\sqrt{2x+6}\geq 0$. Тогда $t^2 = 2x + 6$, $2x = t^2 - 6$. $\sqrt{2x+6}=9-x \ \Leftrightarrow\ 2\sqrt{2x+6}=18-2x \ \Leftrightarrow 2t = 18 - (t^2 - 6) = 24 - t^2 \ \Leftrightarrow (t + 6)\cdot(t - 4) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow 2x = 16 - 6 = 10 \Leftrightarrow x = 5$. Все преобразования эквивалентны – проверка не требуется.

Ответ: 5.

1. Обоснованное угадывание

Уравнение считают решенным, если найдены все его корни или доказано, что корней нет. Поэтому разрешено угадывать корни уравнения и решение считается корректным и правильным, если выполнены два условия:

– корни угаданы и проверены;
– доказано, что других корней нет.

Для того, чтобы обосновывать число корней необходимо знать следующее.

Теорема 1. Пусть дано степенное уравнение в котором старшая степень равна *n*, причём коэффициент при этой степени не равен нулю, то уравнение имеет не более, чем *n* корней.

Теорема 2. Пусть функция *f(x)* монотонная на некотором промежутке. Тогда уравнение *f(x) = a*, имеет на этом промежутке не более одного корня.

Теорема 3: Пусть функция *f(x)* монотонно возрастающая на некотором промежутке, а функция $g(x)$ на этом промежутке нигде не возрастает (или убывает). Тогда уравнение *f(x)* = $g(x)$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Школьный термин «*монотонная функция*» эквивалентен математическому термину «*непрерывная строго возрастающая или строго убывающая функция*». Все функции, изучаемые в школе кроме функции *y = a,* удовлетворяют этому определению.

Задание 1.1

Решите уравнение: $\sqrt[7]{x-1}+\sqrt[4]{x^3+8}=3$. .

Решение: ОДЗ: $x \geq -2$. Левая часть уравнения для любого *x* из ОДЗ монотонно возрастающая функция, так как она состоит из суммы двух возрастающих функций. Правая часть – константа. По теореме о единственности значения монотонной функции, уравнение имеет в ОДЗ не более одного корня. Поскольку *x* = 2 – корень, это единственный корень.

Ответ: 2.

Задание 1.2

Решите уравнение: $\dfrac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\dfrac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}$.

Исследование: уравнение имеет очевидный корень $x=a$, поэтому возникает желание подобрать нужное число корней. Уравнение шестой степени, значит, подобрать осталось всего пять корней.

Известно, что если уравнение можно записать в виде $f(g(x))=0$ и известен один из корней $x=x_0$, то все решения уравнения $g(x)=g(x_0)$ являются корнями исходного уравнения. Обозначим правую часть уравнения *A* и запишем его в виде:

$\dfrac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\dfrac{(x^2-x+1)^3}{(x^2-x)^2}=A$. Видно, что если $g(x)=x^2-x$, то уравнение имеет вид $\dfrac{(g(x)+1)^3}{g^2(x)}=A$. Один из корней этого уравнения, это $x=a$. Значит, решением уравнения является и второй корень уравнения $g(x)=x^2-x=a^2-a$, то есть $x=1-a$.

Разделим числитель и знаменатель левой части на x^3 и запишем его в виде:

$\dfrac{\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)^3}{x-2+\dfrac{1}{x}}=A$. Видно, что если $h(x)=x+\dfrac{1}{x}$, то уравнение имеет вид $\dfrac{(h(x)-1)^3}{h(x)-2}=A$.

Один из корней этого уравнения, это $x=a$. Значит, решением уравнения является и второй корень уравнения $h(x)=x+\dfrac{1}{x}=a+\dfrac{1}{a}$, то есть $x=\dfrac{1}{a}$. Другой корень этого уравнения, это

$x=1-a$. Значит, решением уравнения является и второй корень уравнения $h(x)=x+\frac{1}{x}=1-a+\frac{1}{1-a}$, то есть $x=\frac{1}{1-a}$.

Имея два новых корня, вернёмся к уравнению для $g(x)=x^2-x=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}$. Второй корень $x=\frac{1-a}{a}$. Из уравнения для $h(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{1-a}{a}+\frac{a}{1-a}$, найдём корень $x=\frac{a}{1-a}$. Все шесть корней найдены и осталось записать решение не обязательно объясняя, как найдены корни.

Решение: Обозначим правую часть уравнения A и запишем его в виде:

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=A,\ (x^2-x+1)^3=Ax^2(x-1)^2.$$

Получено уравнение шестой степени. Оно имеет не более, чем шесть корней.

Число $x=a$ является очевидным корнем уравнения.

Число $x=\frac{1}{a}$ является корнем уравнения, так как $\frac{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}+1\right)^3}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}-1\right)^2}=\frac{(1-a+a^2)^3}{a^2(a^2-1)^2}=A$.

Число $x=1-a$ является корнем уравнения, так как $\frac{((1-a)^2-(1-a)+1)^3}{(1-a)^2(1-a-1)^2}=\frac{(1-a+a^2)^3}{a^2(a^2-1)^2}=A$.

Аналогично подстановкой можно доказать, что числа $x=\frac{1}{1-a}$, $x=1-\frac{1}{1-a}=\frac{a}{1-a}$, $x=\left(\frac{a}{1-a}\right)^{-1}=\frac{1-a}{a}$ также корни. Уравнение шестой степени больше шести корней иметь не может.

Ответ: $a,\frac{1}{a},1-a,\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a},\frac{a}{a-1},a\neq 0,a\neq 1$.

Способ 2. Пусть $f(x)=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}$. Перепишем уравнение $f(x)=f(a)$ в виде:

$$\frac{[4(x-0{,}5)^2+3]^3}{4[4(x-0{,}5)^2-1]^2}=\frac{[4(a-0{,}5)^2+3]^3}{4[4(a-0{,}5)^2-1]^2}.$$

Если $x-0{,}5=\pm(a-0{,}5)$, то $x=a$ или $x=1-a$.

Перепишем уравнение $f(x)=f(a)$ в виде: $\frac{\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^3}{x-2+\frac{1}{x}}=\frac{\left(a-1+\frac{1}{a}\right)^3}{a-2+\frac{1}{a}}$. Уравнение $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ имеет корень, $x=a^{-1}$.

Суперпозиция решений даёт ещё три корня: $\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a},\frac{a}{a-1}$. .

Задание 1.3

Для каждого неотрицательного числа $\boldsymbol{a}$ рассмотрим уравнение: $x^3+ax-a^3-29=0$. Пусть $\boldsymbol{x}_0$ – положительный корень этого уравнения. Каково наименьшее значение величины $\boldsymbol{x}_0$?

Исследование: Если $a=0$, то $\boldsymbol{x}$ чуть больше, чем три. Если $\boldsymbol{a}$ большое, уравнение близко к $x^3-a^3=0$. Его единственный корень возрастает при увеличении ***a***. Возможное решение $x_0=3$. Подставив его в уравнение получим 27 + ***3a*** – ***a***^{3} – 29 = 0, ***a***^{3} – ***3a*** + 2 = 0, $a=1$.

Следовательно, уравнение может иметь вид $(x-3)\cdot(...)=(a-1)\cdot(...)$. Делим $x^3+a\,x$ на $x-3$ и получаем $x^3+a\,x=(x-3)\cdot(x^2+3\,x+a+9)+3\,a+27$. Значит, уравнение имеет вид $(x-3)\cdot(x^2+3\,x+a+9)+3\,a+27-a^3-29=0$. Переносим члены, содержащие ***a,*** вправо. $(x-3)\cdot(x^2+3\,x+a+9)=a^3-3\,a+2=(a-1)^2\cdot(a+2)$. Этот вид даёт обоснование решения.

Решение: преобразуем выражение $x^3+a\,x=a^3+29$ к эквивалентному виду:

$$(x-3)\cdot(x^2+3\,x+a+9)=(a-1)^2\cdot(a+2).$$

Если $a=1$, то $x_0=3$. Меньшего корня уравнение иметь не может, так как правая часть при $a\neq 1$ положительная, а левая при $x<3$ отрицательная.

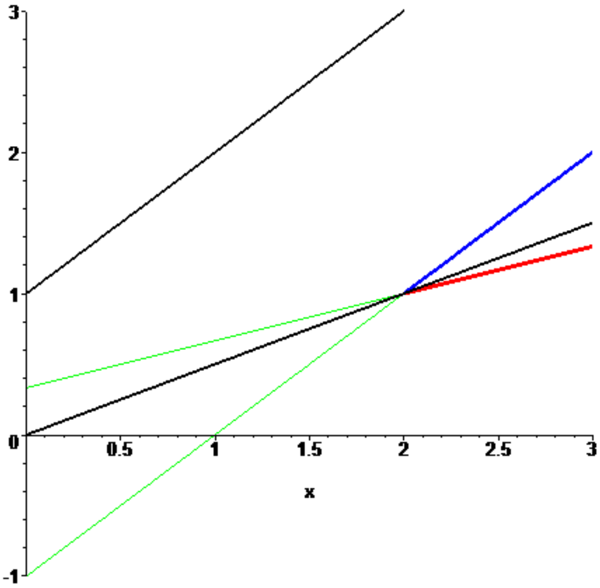
Ответ: $x_0=3$.

2. Плоскость x – a

Задание 2.1

Решите уравнение: $|x-a+1|+|x-2a|=x$.

Исследование: «лобовое» решение с открытием модулей требует тщательного разбора совокупности четырёх уравнений. Обычно решающие запутываются в условиях, которые должны одновременно выполняться. Рассмотрим плоскость ***x – a***. Проведем в ней линии, соответствующие случаям, когда выражения, стоящие под знаком модуля, равны нулю. Для первого модуля $x-a+1=0, a=x+1$, для второго $x-2a=0, a=\frac{x}{2}$. Линии показаны чёрным цветом. Заметим также, что решение возможно лишь при $x\geq 0$. Прямые разбивают полуплоскость $x\geq 0$ на три части. Рассмотрим нижнюю часть. В ней $a\leq\frac{x}{2}$, причём $a\leq\frac{x}{2}<x+1$. Значит, оба выражения под знаком модуля положительные и уравнение имеет вид $x-a+1+x-2a=x$. Его решение $x=3a-1$. Построив график решения, видим, что только часть его, соответствующая $a\geq 1$ и показанная красным цветом, лежит в области $a\leq\frac{x}{2}$.



Рассмотрим среднюю часть. В ней $a\leq\frac{x}{2}$, причём $\frac{x}{2}<a\leq x+1$. Значит, первое выражение под знаком модуля положительное, а второе отрицательное. Уравнение имеет вид $x-a+1-x+2a=x$. Его решение $x=a+1$. Построив график решения, видим, что только часть его, показанная синим цветом и соответствующая $a>1$ лежит в этой части.

Рассмотрим верхнюю часть. В ней $a>x+1$, причём $\frac{x}{2}<x+1<a$. Значит, оба выражения под знаком модуля отрицательные. Уравнение имеет вид $-x+a-1-x+2a=x$. Его решение $x=a-\frac{1}{3}$. Построив график решения видим, что оно не лежит в рассматриваемой части.

При записи решения ищем простые обоснования того факта, что $a\geq 1$. При записи ответа учтём, что ответ в форме: для $a\geq 1, x=a+1$ и $x=3a-1$ похож на правильный, но не корректный. В таком ответе подразумевается, что при ***a*** = 1 ответов два, а действительно ответ только один (***x*** = 2). Оформление решения не требует графика. Его лучше оставить в черновике.

Решение: Решение возможно лишь при $x\geq 0$. Пусть $2a\leq x$. Тогда $a\leq\frac{x}{2}<x+1$. Оба выражения под знаком модуля положительные и уравнение имеет вид $x-a+1+x-2a=x$. Его решение $2a\leq x=3a-1$. Значит, $\begin{cases} x=3a-1, \\ a\geq 1. \end{cases}$

Пусть $\frac{x}{2}<a\leq x+1$. Первое выражение под знаком модуля положительное, а второе отрицательное. Уравнение имеет вид $x-a+1-x+2a=x$. Его решение $x=a+1<2a$.

Значит, $\begin{cases} x=a+1, \\ a>1. \end{cases}$

Пусть $a>x+1>\frac{x}{2}$. Оба выражения под знаком модуля отрицательные. Уравнение имеет вид $-x+a-1-x+2a=x$. Его решение $x=a-\frac{1}{3}<a-1$. Противоречие.

Ответ: если ***a*** = 1, то ***x*** = 2. Если ***a > 1,*** то $x=a+1$ и $x=3a-1$.

3. Метод скрытого множителя (квадрата)

Задание 3.1

Решите уравнение: $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}+4=42\dfrac{1}{4}$.

Исследование: в задаче встроена подсказка. Из правой части перенесена в левую четвёрка. Два квадрата очевидны: $\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=\left(\dfrac{2x}{x+2}\right)^2, 42\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{13}{2}\right)^2$. То, что осталось, это x^2+4. Здесь нужно догадаться до соотношений $x^2+4=(x+2)^2-4x$ и $2\cdot\dfrac{2x}{x+2}\cdot(x+2)=4x$.

Решение: ОДЗ: $x\neq-2$. Выделим полный квадрат:

$$(x^2+4x+4)-4x+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=42\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(x+2-\frac{2x}{x+2}\right)^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2.$$

Если $x+2-\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow(x+1{,}5)\cdot(x-6)=0$. Если $x+2-\dfrac{2x}{x+2}=-\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{17}{4}\right)^2=\dfrac{17}{16}$.

Ответ: $6,-\dfrac{3}{2},\dfrac{\pm\sqrt{17}-17}{4}$.

5. Использование свойств функций

Уравнение содержит функции и в ряде случаев эти функции применяются к разным выражениям. При этом полезны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $y=f(x)$ монотонная на некотором промежутке. Тогда уравнение $f(x)=f(a)$ имеет на этом промежутке единственный корень $x=a$.
Иными словами: Равенство значений функции эквивалентно равенству аргументов.

Задание 5.1

Решите уравнение $3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2|\sqrt{3x+18}-2|$.

Решение: ОДЗ: $x\geq-6$. Пусть $t=\sqrt{3x+18}$. Уравнение приобретает вид $3x-2|x-2|=3t-2|t-2|$. Функция $f(x)=3x-2|x-2|=\begin{cases} x+4, x\geq 2, \\ 5x-4, x<2. \end{cases}$ Она монотонная. Равенство значений функции эквивалентно равенству аргументов. Значит,

$$f(x)=f(\sqrt{3x+18})\Leftrightarrow x=\sqrt{3x+18}\Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

Решите систему уравнений $\begin{cases} 6\cos x + 4\cos y = 5, \\ 3\sin x + 2\sin y = 0. \end{cases}$

3. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x,y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению $2|x+2| + |y| + |2x - y| = 4$. (тема **3**)

4. При положительных x решите уравнения $x^x = 4$ и $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (тема **6**)

9. Решите уравнение $3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x + 18} - 2|$.