Планиметрия

http://www.deoma-cmd.ru/

Комплект основан на учебнике Я.П.Понарина. Материалы комплекта учитель может использовать на уроках, ученик с его помощью может самостоятельно изучить тему. Комплект представляет решения задач, сопровождаемые интерактивными файлами, выполненными в программе GInMA. Базовая программа бесплатно скачивается с сайта ***http://www.deoma-cmd.ru/***. Исследование построений с помощью интерактивных файлов углубляет понимание геометрии, развивает воображение учащихся. Пользуясь данным материалом Вы можете дать возможность ребёнку с интересом войти в магический мир геометрии. Самому совершить открытие основных закономерностей. Это позволит легче запомнить равенства, которые необходимо знать в старших классах школы. Доказательства геометрических утверждений развивают логику обучаемого. Вход в интерактивные рисунки выполняется с помощью щелчка по фигуре. Для полноценного использования собственных рисунков необходимо купить комплект на сайте ***http://www.deoma-cmd.ru/***

Чтобы увидеть интерактивный рисунок, щелкните по рисунку в тексте. Можно воспользоваться видео «Как преобразовать рисунки из текста в интерактивные рисунки» http://youtu.be/g7KA-HzU_h0.

Чтобы понять, как управлять рисунком, пользуйтесь инструкцией в видео файле «Построение сечения в GinMA» 2.10.2011, http://www.youtube.com/watch?v=z9IDctiHR-M, а также «Руководством для пользователя комплекта» ***http://www.deoma-cmd.ru/***.

Определения

Окружность

Окружность – это замкнутая плоская кривая, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки ***O***, называемой центром окружности, на данное расстояние ***R***.
Любая прямая, проходящая через центр окружности, является её осью симметрии.

Круг

Круг – это фигура, ограниченная окружностью. Расстояние от любой точки круга до центра меньше, чем радиус.

Радиус

Радиус окружности – это любой отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности (или длина такого отрезка). Радиус принято обозначать буквой ***R***. Радиусом круга называют радиус соответствующей окружности.

Хорда и диаметр

Отрезок, соединяющий произвольные не совпадающие точки окружности, называется хордой. Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром. Хордой круга называют хорду соответствующей окружности. Диаметром круга называют диаметр соответствующей окружности.Диаметр окружности – это любой отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через центр окружности (или длина такого отрезка). Диаметр принято обозначать буквой ***D***.

Дуга

Дуга окружности – это часть окружности, расположенная между двумя точками окружности.

Сектор

Сектор круга – это часть круга, расположенная между двумя радиусами соответствующей окружности.

Равенство фигур

Считается, что геометрические фигуры можно перемещать по плоскости, как целое и они при таком перемещении ***не изменяются***. Кроме того, фигуры можно зеркально отражать относительно любой прямой, как оси симметрии. В частности, фигуры можно накладывать друг на друга. Любые геометрические фигуры равны, если при наложении их можно совместить друг с другом.

Симметрии

Задание 1.1

Центр окружности является центром симметрии этой окружности и центром симметрии соответствующего круга. Экспериментально проверьте это. Для этого:

– для произвольной точки A на окружности найдите симметричную ей точку A' на этой же окружности.

– для произвольной точки B круга найдите симметричную ей точку B' внутри этого же круга.

Докажите утверждение. Это полезно для развития умения строить логические цепочки.

Задание 1.2

Любая прямая, проходящая через центр окружности является осью симметрии этой окружности и соответствующего ей круга. Экспериментально проверьте это. Для этого:

– для произвольной точки A на окружности найдите симметричную ей точку A' на этой же окружности.

– для произвольной точки B круга найдите симметричную ей точку B' внутри этого же круга.

Доказательство:

Пусть L – прямая, проходящая через центр окружности точку O, A – произвольная точка на окружности.

Если A лежит на L, то она переходит в себя и лежит на окружности.

Если A не лежит на L, она переходит точку A'. По свойству симметрии, $OA' = OA$. Значит, A' – точка окружности. Значит, точка A окружности переходит точку A', A' окружности переходит точку A, то есть эти точки меняются местами. Точку A можно выбрать в любой точке окружности. Значит, вся окружность переходит в саму себя. Заметим, что точки пересечения окружности и прямой являются стационарными точками симметрии, то есть точками, переходящими сами в себя. ■

Задание 1.3

Заданы две окружности. Постройте для них общую ось симметрии.
Самостоятельно проверьте, что для любой точки, принадлежащей одной из окружностей, найдется на этих же окружностях симметричная ей точка.

Докажите, что искомая ось – это прямая, проходящая через центры окружностей.

Теорема

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.
Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду этой окружности, делит эту хорду пополам.
Отрезок, соединяющий середину хорды, отличной от диаметра, с центром окружности, перпендикулярен хорде.

Доказательство:

Рассмотрим хорду AC и отрезок OB, как элементы равнобедренного треугольника AOC ($AO = CO$). Все утверждения следуют из свойств медианы – высоты OB этого треугольника.

Задание 1.4

Дана точка B, расположенная внутри заданной окружности с центром в точке O. Постройте хорду AC этой окружности, для которой точка B является серединой.

Задание 1.5

Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.

Задание 1.6

В окружности проведены два диаметра AA' и CC'. Концы этих диаметров служат вершинами четырёхугольника, противоположные стороны которого равны. Экспериментально проверьте это. Докажите это.

Известно, что четырёхугольник, противоположные стороны которого равны – это всегда параллелограмм. Стоит ли называть четырёхугольник ACA'C' параллелограммом?

Исследования

Центральный угол

Угол с вершиной в центре окружности называется центральным по отношению к этой окружности. Каждый центральный угол окружности определяет дугу окружности, которая состоит из точек окружности, принадлежащих этому углу. На рисунке показан центральный угол (синяя дужка) и соответствующая дуга окружности. Записаны значения угловой меры угла и дуги, выраженные в градусах. Сравните их величины и установите связь между ними. Нужно ли доказывать полученное соотношение?

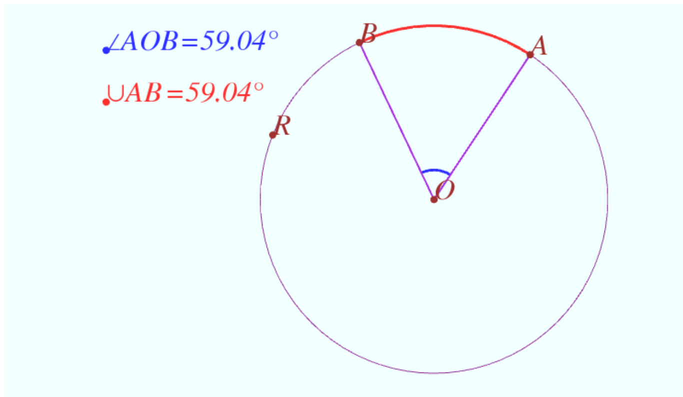


Рис. 1. Центральный угол (синяя дужка) и соответствующая дуга окружности.

Равенство значений угловой меры угла и угловой меры дуги следует из определения и не требует доказательства.

Вписанный угол

Вписанным углом, опирающимся на дугу ***AB***, называется угол ***ACB***, вершина ***C*** которого лежит на окружности, но не на дуге ***AB***. На рисунке показан центральный угол (синяя дужка) и соответствующая дуга окружности. Записаны значения угловой меры угла и дуги, выраженные в градусах. Сравните их величины и установите связь между ними. Нужно ли доказывать полученное соотношение?

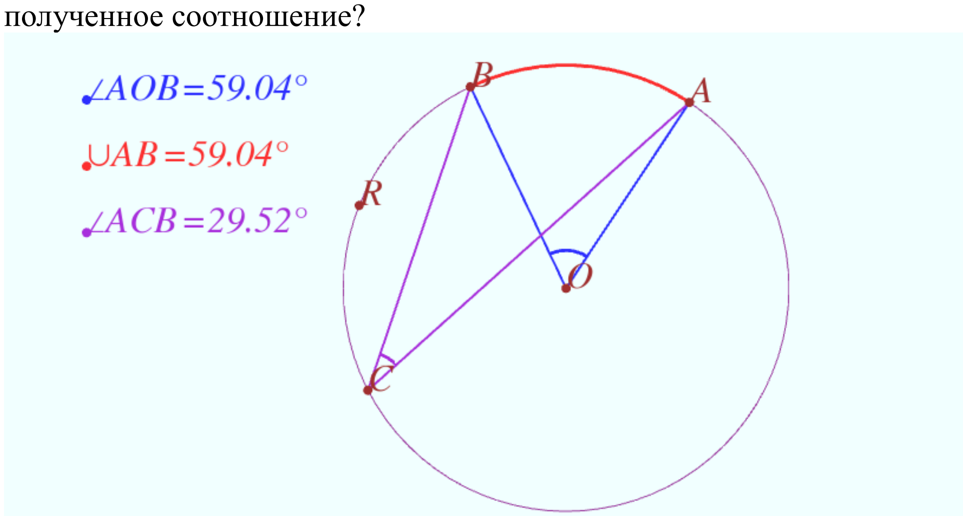


Рис. 2.

Центральный угол, вписанный угол и дуга окружности.

Во всех рассмотренных случаях, вписанный угол вдвое меньше соответствующего центрального, то есть : $2\angle ACB = \angle AOB$. Утверждение требует доказательства.

Угол с вершиной внутри круга

Пусть точка ***E*** расположена внутри круга, причём в этой точке пересекаются хорды ***BC*** и ***AD***. Обозначим дуги $\alpha=\cup AB,\beta=\cup CD$. Найдите соотношение, связывающее угловые значения этих дуг и $\measuredangle AED$. Нужно ли доказывать полученное соотношение?

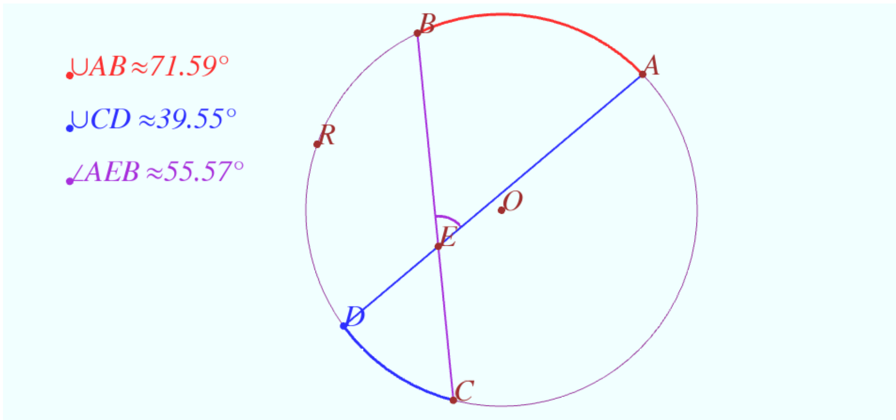


Рис. 3. Угол с вершиной внутри окружности и дуги окружности, на которые он опирается.

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, одна из которых находится внутри этого угла, а другая - внутри угла, вертикального к данному, $\measuredangle AEB=\frac{\alpha+\beta}{2}$, *где* $\alpha=\cup AB,\beta=\cup CD$. Утверждение требует доказательства.

Угол с вершиной вне круга

Пусть точка ***F*** расположена внутри круга, причём в этой точке пересекаются секущие ***BC*** и ***AD***. Обозначим дуги $\alpha=\cup AB,\beta=\cup CD$. Найдите соотношение, связывающее угловые значения этих дуг и $\measuredangle AFD$. Нужно ли доказывать полученное соотношение?

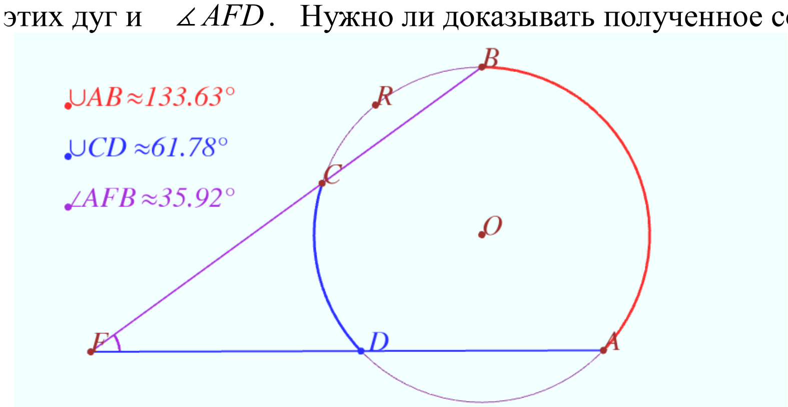


Рис. 4. Угол с вершиной вне окружности и дуги окружности, которые он высекает.

Угол с вершиной вне круга каждая из сторон которого пересекает окружность в двух точках, измеряется полуразностью дуг, заключённых внутри этого угла. $\measuredangle AFB=\frac{|\alpha-\beta|}{2}$, *где* $\alpha=\cup AB,\beta=\cup CD$. Утверждение требует доказательства.

Угол с между касательной и хордой

Пусть прямая ***A'B*** — это касательная к окружности в точке В. Обозначим дугу $\alpha = \cup AB$. Найдите соотношение, связывающее угловые значения этой дуги и $\measuredangle A'BA$. Нужно ли доказывать полученное соотношение?

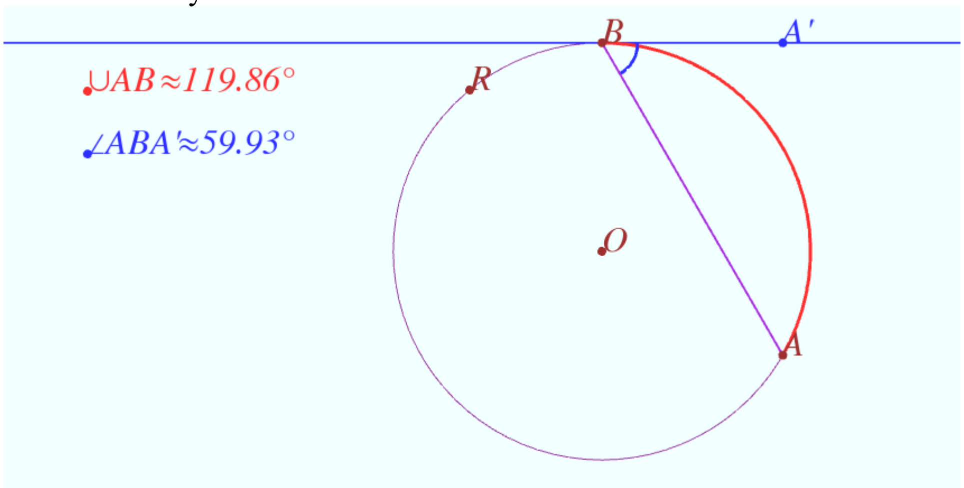


Рис. 5. Угол между касательной и хордой.

Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой внутри этого угла $\measuredangle ABA' = \frac{\alpha}{2}$, *где* $\alpha = \cup AB$.

Утверждение требует доказательства.

Угол, опирающийся на диаметр

Пусть ***AC*** — это диаметр окружности, а ***B*** — точка этой же окружности, отличная от ***A*** и ***C***. Тогда $\measuredangle ABC = 90°$. Это утверждение нужно доказать.

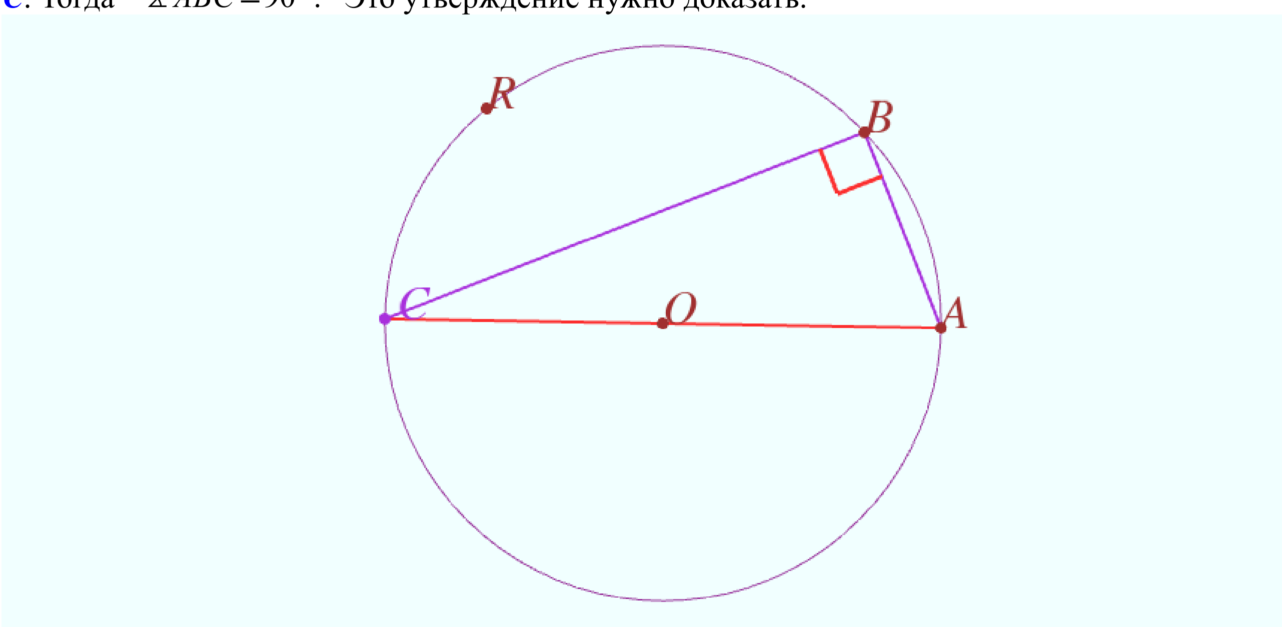


Рис. 6. Угол, опирающийся на диаметр окружности.

Диаметр, проходящий через середину хорды

Пусть ***AC*** — это диаметр окружности, а ***BB'*** — хорда этой же окружности, отличная от ***AC***, причём диаметр проходит через середину хорды точку ***M***. Тогда диаметр перпендикулярен хорде. Это утверждение нужно доказать.

Пусть ***AC*** — это диаметр окружности, а ***BB'*** — хорда этой же окружности, причём диаметр перпендикулярен хорде. Тогда диаметр пересекает хорду в её середине. Эти утверждения нужно доказать.

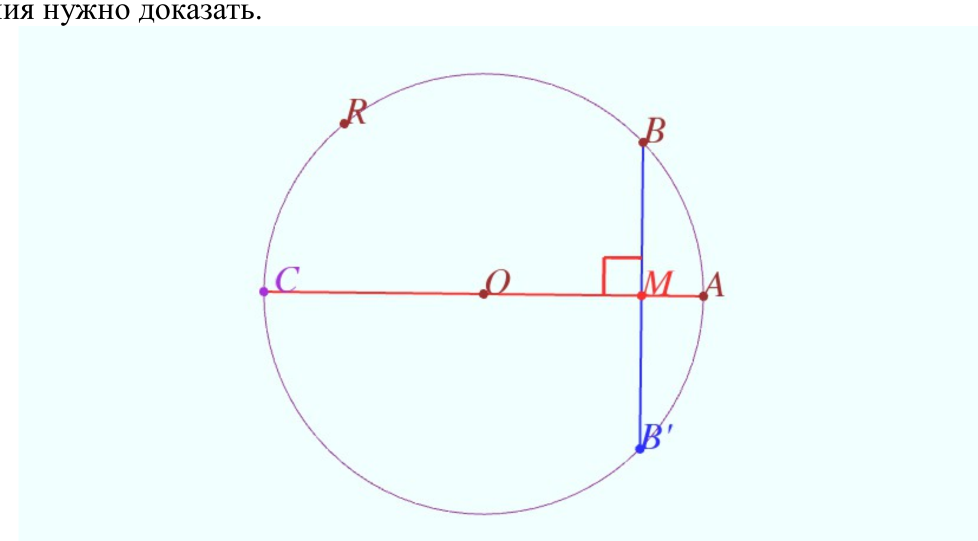


Рис. 7. Угол между диаметром и хордой.

Касательные

Касательной называют прямую, имеющую ровно одну общую точку с окружностью. Точкой касания называют единственную общую точку касательной и окружности. Через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести к этой окружности ровно две касательные. Касательной из данной точки называют отрезок, соединяющий данную точку с точкой касания прямой, проходящей через эту точку, и окружности. Исследуйте связь между отрезками касательных ***AB*** и ***AC***, проведенных из точки ***A*** к окружности.

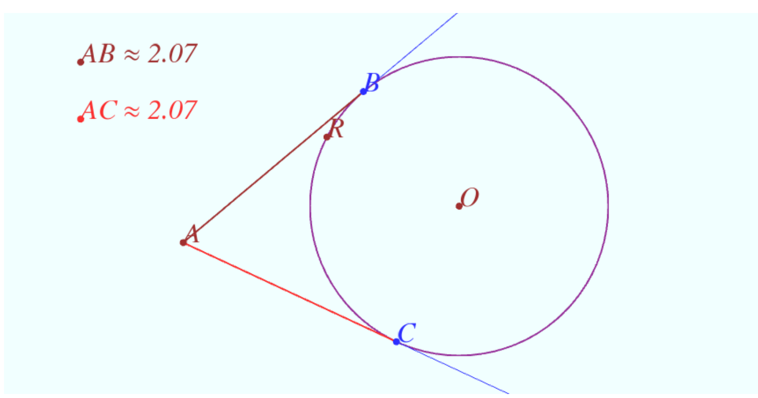


Рис. 8. Касательные к окружности.

Отрезки касательных ***AB*** и ***AC***, проведенных из точки ***A*** к окружности, равны между собой. Эти утверждения нужно доказать.

Касательная и секущая

Секущей называют прямую, имеющую ровно две общие точки с окружностью. Отрезками секущей называют отрезки от данной точки (***A***), расположенной вне окружности, до точек пересечения секущей и окружности. Записаны длины отрезков касательной (***AB***) и секущей (***AC*** и ***AD***). Установите связь между ними. Нужно ли доказывать полученное соотношение?

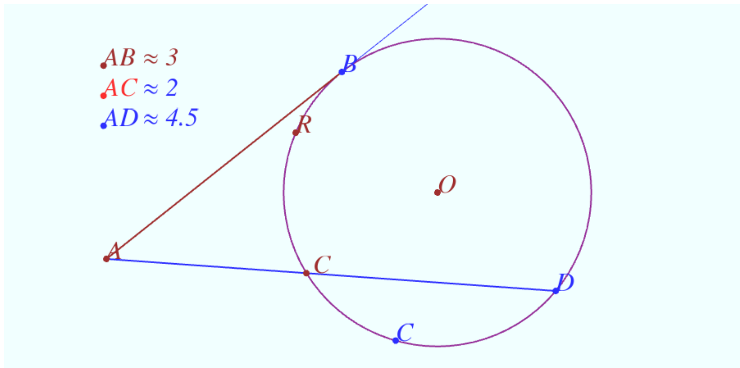


Рис. 9. Касательная к окружности и секущая.

Произведение отрезков секущей ***AD*** и ***AC***, проведенных из точки ***A*** к окружности, равно квадрату касательной ***AB*** $AB^2 = AC \cdot AD = OA^2 - R^2$. Это утверждение нужно доказать.

Пересекающиеся хорды

Хордами называют отрезки, концы которых расположены на окружности. Пусть хорды пересекаются в данной точке (***A***), расположенной внутри окружности. Записаны длины отрезков хорд (***AB, AC, AD*** и ***AE***). Установите связь между ними. Нужно ли доказывать полученное соотношение?

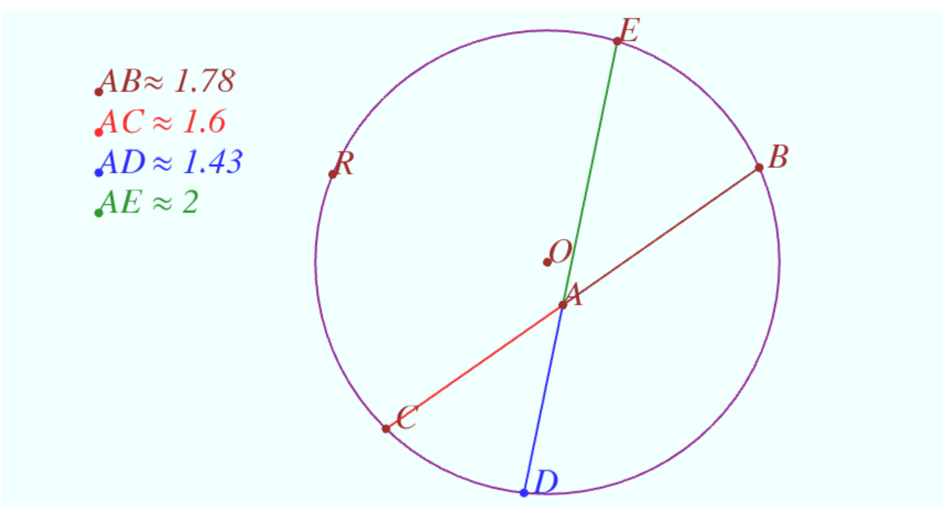


Рис. 10. Пересекающиеся хорды окружности.

Произведение отрезков хорд – это постоянная для заданной окружности и заданной точки величина $AB \cdot AC = AD \cdot AE = R^2 - OA^2$. Это утверждение нужно доказать.

Вписанный четырёхугольник

Четырёхугольник называют вписанным, если все его вершины лежат на окружности. Четырёхугольник называют выпуклым, если все его углы меньше, чем 180°. Пусть точки ***A***, ***B, C*** и ***D*** расположены на окружности в указанном порядке. Записаны угловые меры углов ***BAD*** и ***BCD***. Установите связь между ними. Нужно ли доказывать полученное соотношение?

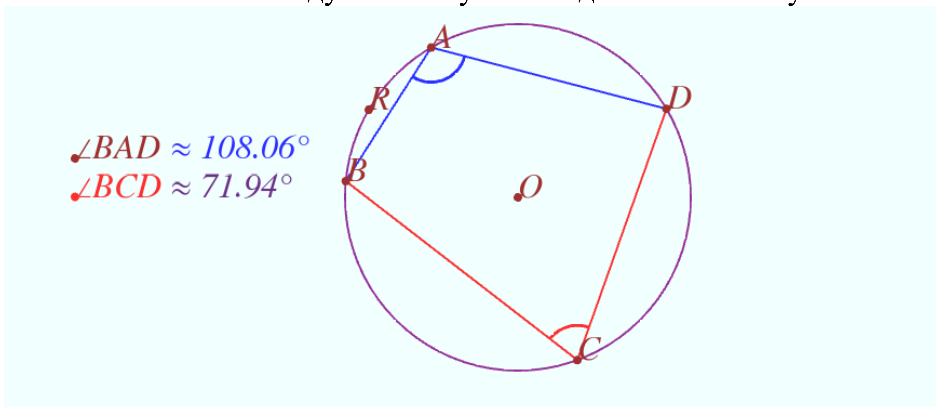


Рис. 11. Вписанный четырёхугольник.

Сумма противолежащих углов вписанного выпуклого четырёхугольника равна $\measuredangle BAD + \measuredangle BAD = 180^{\circ}$. Это утверждение нужно доказать.

Описанный четырёхугольник

Четырёхугольник называют описанным, если все его стороны касаются данной окружности в своих внутренних точках. Пусть касательные в точках ***A***, ***B, C*** и ***D*** попарно пересекаются в точках ***E***, ***F, G*** и ***H*** причём четырёхугольник ***EFGH*** - описанный. Записаны суммы его противоположных сторон. Установите связь между ними. Нужно ли доказывать полученное соотношение?

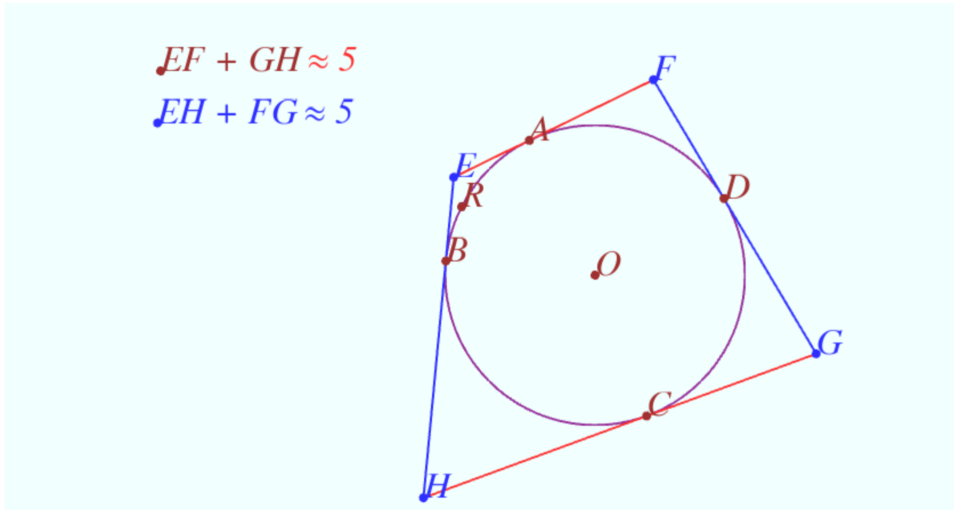


Рис. 12. Описанный четырёхугольник.

Суммы противолежащих сторон описанного четырёхугольника равны между собой $EF + GH = EH + FG$. Это утверждение нужно доказать.

Критерии описанного четырехугольника
Теоремы

Для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы биссектрисы трех его углов пересекались в одной точке.

Для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны.

Задача 1.2
Общая касательная

1. Постройте общую касательную к двум данным окружностям.

2. Окружности касаются внешне в точке A, CD - общая внешняя касательная. Докажите, что ***∠CAD = 90°.***

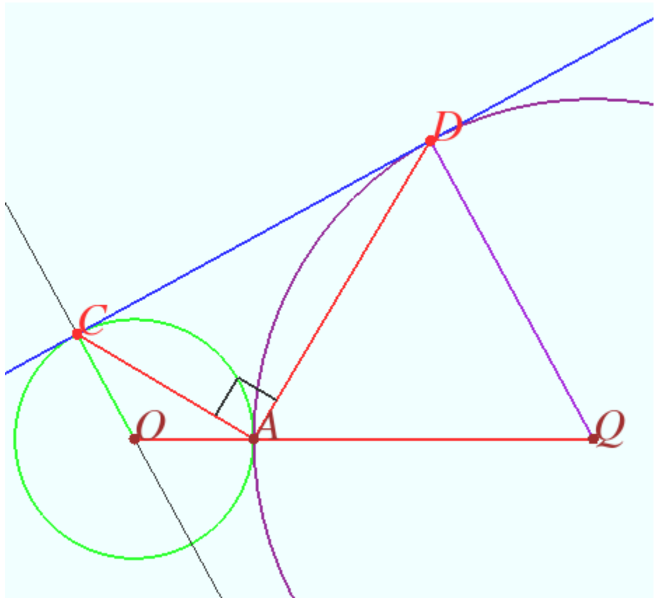


Рис. 13. Общая касательная, построение и свойство

Задача 1.3
Внутреннее касание

Окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда CD внешней касается внутренней окружности в точке B. Докажите, что ∠BAC = ∠BAD.

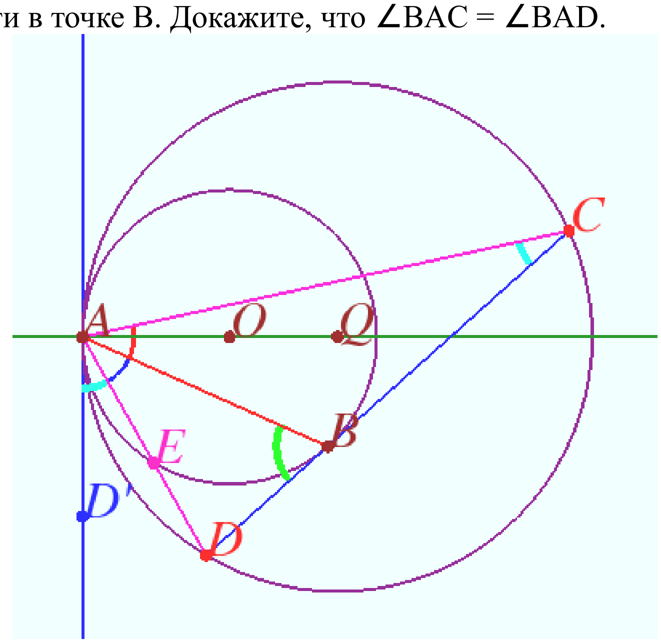


Рис. 14. Внутреннее касание окружностей

Задача 1.4

Пара вписанных окружностей

Вписанная окружность ω с центром I касается AB и BC в точках E и F. J -центр вписанной окружности Ω треугольника BEF. Докажите, что J∈ω.

Решение.

Пусть *D* точка касания Ω и *EF*, $\angle IBF=\beta$. Треугольник *BEF* равнобедренный (касательные *BE* и *BF* равны). Биссектриса *BD* является высотой треугольника *BEF.* Точки *I* и *J* лежат на биссектрисе угла *B*, значит, точки *B, I, D* и *J* лежат на одной прямой, перпендикулярной *EF.* $\angle IBF=\angle IFD=\beta$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Расстояние от *J* lj стороны *BF* равно *JD*, значит,

$$BD=JD+JB=JD\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)=BI-ID=\frac{IF}{\sin\beta}-IF\sin\beta=IF\frac{1-\sin^2\beta}{\sin\beta}.$$ Значит,

$$\frac{JD}{IF}=1-\sin\beta\,,\ IJ=ID+JD=IF\sin\beta+IF(1-\sin\beta)=IF\,.$$

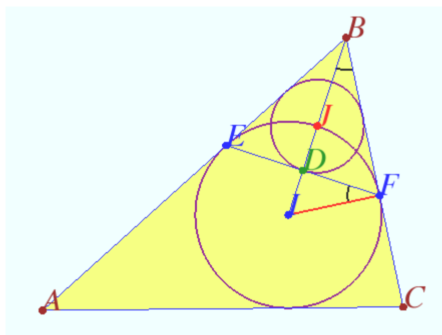


Рис. 15. Пара вписанных окружностей

Задача 1.5

Центры дуг вписанного четырёхугольника

В окружность вписан четырехугольник *ABCD*. Точки *A', B',C', D*' являются соответственно серединами дуг *AD, AB, BC, CD*. Докажите, что прямые *A'C*' и *B'D*' перпендикулярны.

Заметим, что сумма дуг, на которые опираются вертикальные углы *A'ED*' и *B'EC'* равна половине суммы всех дуг, составляющих окружность.

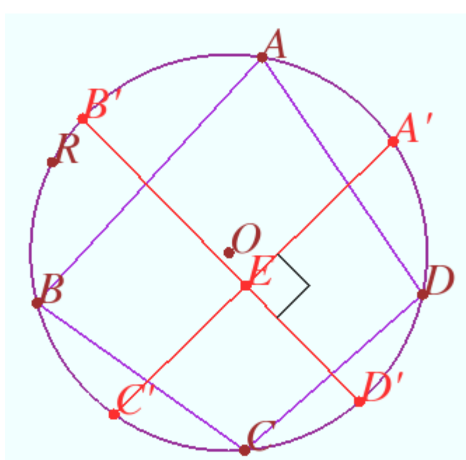


Рис. 16. Свойства середин дуг

Задача 1.6, 1.7
Дуализм биссектрис и высот вписанного треугольника

Около треугольника ABC описана окружность ω. Биссектрисы углов A, B, C пересекают ω соответственно в точках A', B', C'. Докажите, что прямая AA' перпендикулярна $B'C'$.
Прямые AA', BB', CC', содержащие высоты остроугольного треугольника ABC, пересекают описанную около него окружность в точках A', B', C'. Докажите, что эти прямые содержат биссектрисы углов треугольника AA', BB', CC'.

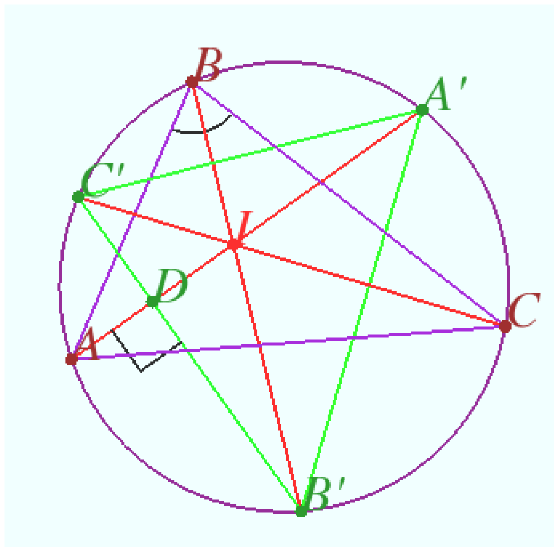


Рис. 17. Дуализм биссектрис и высот вписанного треугольника

Задача 1.8
Три равных отрезка

Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке I. Биссектриса угла C вторично пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке C'. Докажите, что $AC' = C'I = BC'$.

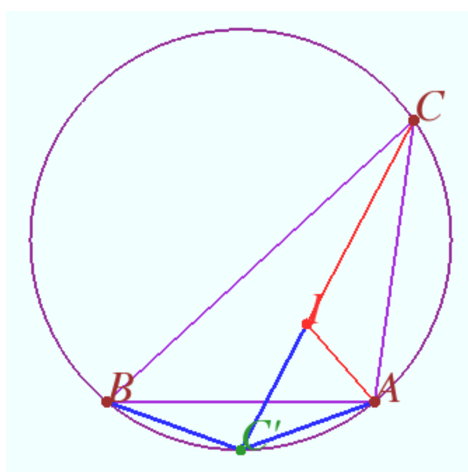


Рис. 18. Три равных отрезка

Задача 7.4
Сумма углов

7.4. Докажите, что в описанном четырехугольнике равны суммы углов, под которыми видны из центра вписанной окружности противоположные стороны.

Решение:

Пусть четырёхугольник *ABCD* описан вокруг окружности с центром *O*. Сумма углов треугольника равна 180°, значит,

$$\angle AOB + \angle ABO + \angle BAO = 180^\circ, \angle COD + \angle CDO + \angle DCO = 180^\circ.$$

Отрезки *AO, BO, CO, DO* - биссектрисы углов четырёхугольника *ABCD*, значит,

$$\angle BAO = \angle\frac{A}{2}, \angle ABO = \angle\frac{B}{2}, \angle DCO = \angle\frac{C}{2}, \angle CDO = \angle\frac{D}{2}.$$

Сумма углов четырёхугольника *ABCD* равна 360°, сумма половин этих углов равна 180°, значит, $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

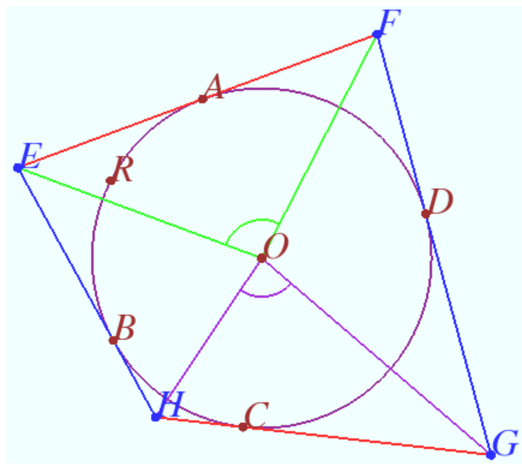


Рис. 7.1. Сумма углов

Задача 7.12
Отношение расстояний

Докажите, что квадраты расстояний от центра окружности, вписанной в четырехугольник, до двух его противоположных вершин относятся как произведения сторон, сходящихся в этих вершинах.

Решение:

Пусть четырёхугольник *ABCD* описан вокруг окружности с центром *O*. Требуется доказать, что $\frac{AO^2}{CO^2} = \frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD}$. Пользуемся тем, что в любых треугольниках с вершиной *O* одинаковая высота из вершины *O*, равная радиусу окружности. Заменим отношение произведений сторон отношением произведений площадей треугольников

$$\frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD} = \frac{\frac{AB \cdot R}{2} \cdot \frac{AD \cdot R}{2}}{\frac{BC \cdot R}{2} \cdot \frac{CD \cdot R}{2}} = \frac{S_{ABO} \cdot S_{ADO}}{S_{BCO} \cdot S_{CDO}}.$$

Вычислим это произведение другим способом.

$$\frac{S_{ABO} \cdot S_{ADO}}{S_{BCO} \cdot S_{CDO}} = \frac{\frac{AO \cdot BO \sin\angle AOB}{2} \cdot \frac{AO \cdot DO \sin\angle AOD}{2}}{\frac{CO \cdot BO \sin\angle BOC}{2} \cdot \frac{CO \cdot DO \sin\angle COD}{2}} = \frac{AO^2}{CO^2} \cdot \frac{\sin\angle AOB \cdot \sin\angle AOD}{\sin\angle BOC \cdot \sin\angle DOC}.$$

Так как $\angle AOB + \angle COD = 180°$, то $\sin\angle AOB = \sin COD$. Аналогично, $\sin\angle AOD = \sin BOC$. Значит, $\frac{AO^2}{CO^2} \cdot \frac{\sin\angle AOB \cdot \sin\angle AOD}{\sin\angle BOC \cdot \sin\angle DOC} = \frac{AO^2}{CO^2}$ и $\frac{AO^2}{CO^2} = \frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD}$.

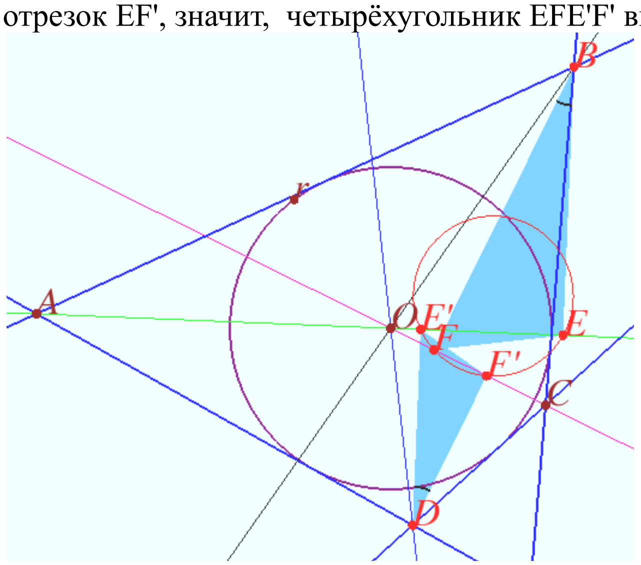
Задача:
Четырёхугольник *ABCD* описан вокруг окружности с центром *O*. Из вершин B и D опущены перпендикуляры *BE* и *DE'* на прямую *AO*, *BF* и *DF'* на *CO*, соответственно. Докажите, что четырёхугольник *EFE'F'* вписанный и $BF \cdot DF' = BE \cdot DE'$.
Решение:
Известно, что $\frac{AO^2}{CO^2} = \frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD}$. Пользуемся тем, что в любых треугольниках с вершиной O одинаковая высота из вершины O, равная радиусу окружности. Заменим отношение произведений сторон отношением произведений площадей треугольников

$$\frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD} = \frac{\frac{AB \cdot R}{2} \cdot \frac{AD \cdot R}{2}}{\frac{BC \cdot R}{2} \cdot \frac{CD \cdot R}{2}} = \frac{S_{ABO} \cdot S_{ADO}}{S_{BCO} \cdot S_{CDO}}.$$

Вычислим это произведение рассматривая AO и CO, как основания треугольников. Так как расстояние от B до прямой AO равно BE, до прямой CO равно BE', расстояние от D до прямой AO равно BF, до прямой CO равно BF', получаем:

$$\frac{S_{ABO} \cdot S_{ADO}}{S_{BCO} \cdot S_{CDO}} = \frac{\frac{AO \cdot BE}{2} \cdot \frac{AO \cdot DE'}{2}}{\frac{CO \cdot BF}{2} \cdot \frac{CO \cdot DF'}{2}} = \frac{AO^2}{CO^2} \cdot \frac{BE \cdot DE'}{BF \cdot DF'}.$$

Значит, $\frac{BE \cdot DE'}{BF \cdot DF'} = 1, \frac{BE}{BF} = \frac{DF'}{BE'}$.
Треугольники BFE и DE'F' подобны, так как у них пропорциональны стороны содержащие равные углы FBE и F'DE'. Значит, равны углы BFE и DE'F'.
Следовательно, равны углы OFE и OE'F', дополняющие равные углы до прямых.
Эти углы опираются на отрезок EF', значит, четырёхугольник EFE'F' вписанный.



Литература

И.Ф.Шарыгин. Геометрия 7-9 классы. – М.: Дрофа, 2002. – 368 с.
Раздел 2.4. Плоские кривые, многоугольники, окружность. с. 43 – 50.
Я.П.Понарин. Элементарная геометрия. Т.1. – М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.
Часть1. §1. Измерение углов. Ассоциированных с окружностью. с. 13 – 16.
В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии – М.: МЦНМО, 2000. – 584 с.
Глава 3. Окружности. с. 57 – 79.
Л.С. Атанасян и др. Геометрия 7-9 классы. – М.: Просвещение, 2006. – 384 с.
Глава 8 §1, 68. Взаимное расположение прямой и окружности. с.164 – 169.
И.М.Смирнова, В.А.Смирнов. Геометрия 7-9 классы. – М.: Мнемозина, 2005. – 376 с.
Глава 3 §16. Окружность и круг. с.71 – 74.