Доказательства

Умение доказать (четко обосновать) свою точку зрения считается полезным в демократическом обществе. Нужно понимать ЧТО нужно доказать и КАК это сделать.

Ниже будут рассмотрены ряд задач начиная от простейших и до достаточно сложных. Задачи будут добавляться постепенно в течении 2013 – 2014 учебного года.

Задание 1

Существуют ли такие $N + 1 > 3$ различных натуральных чисел, что сумма любых N из них не меньше квадрата оставшегося

Метод крайнего: В любой числовой последовательности всегда есть самое маленькое и самое большое. Эти числа особые и их часто применяют для доказательства.

Упрощённая задача. Существуют ли такие 3 различных натуральных числа, что сумма любых двух из них не меньше квадрата оставшегося. Если $a < b < c$, то $c > 2$, $c^2 > 2c > a + b$.

Решение: Предположим, что искомые числа существуют. Упорядочим их по возрастанию: $n=m_1+m_2+m_3+...+m_i$, $1\le m_1<m_2<m_3<...<m_i$, $i<m_i$.

Сравним квадрат самого большого и сумму всех остальных: $m_i^2>i\cdot m_i>m_1+m_2+m_3+...+m_i$. Противоречие.

Ответ: Не существуют.

Задание 2

Сумма каких–то трех членов бесконечной арифметической прогрессии равна сумме каких–то двух членов этой прогрессии. Все члены прогрессии – положительные числа. Докажите, что сумма любых N членов этой прогрессии равна какому–то члену этой прогрессии.

Решение: Запишем упомянутые пять членов прогрессии, присвоив им номера *i, j, k, l, m*.

$a_i=a+i\,d$, $a_j=a+j\,d$, $a_k=a+k\,d$, $a_l=a+l\,d$, $a_m=a+m\,d$, где $a>0, d>0$ так как все члены прогрессии положительные.

По условию, $a_i+a_j=2a+(i+j)d$, $a_k+a_l+a_m=3a+(k+l+m)d$, $a=(i+j-k-l-m)d=nd$.
Значит, $n>0, a_i=(n+i)d$.

Сумма любых N членов этой прогрессии равна $\sum a_i=(N n+\sum i)d=(n+(N-1)n+\sum i)d$,
где $\sum i$ – это сумма номеров членов прогрессии, участвующих в суммировании.
Соответствующий член прогрессии имеет номер $(N-1)n+\sum i$.

Задание 3

Вася отметил 10 клеток в квадрате 10 × 10. Всегда ли Петя может вырезать из этого квадрата по линиям сетки 19 четырехклеточных фигурок следующего вида: квадрат 2 × 2, змея (две верхние клетки квадрата сдвинуты вправо на одну клетку), полоска (четыре клетки подряд) и Г (клетка лежащая слева на трёх), так, чтобы они не содержали отмеченные клетки? Петя может вырезать фигурки разных типов.

Размышляем: Если ответ «Да», необходимо для любого расположения клеток дать алгоритм размещения фигурок. Ответ «Нет» проще в том смысле, что достаточно найти противоречие, которое не позволит расставить фигурки. При этом Вася стремится нагадить Пете и создать такое расположение клеток, при котором задача для Пети станет неразрешимой.

Особенность фигурок – в каждой из них ровно две клетки одного цвета, две другого.

Значит, можно рассматривать, например, только чёрные клетки. Вася может закрасить 10 любых чёрных клеток, значит, на доске для Пети достижимы 40 чёрных клеток. Васе за счёт расположения клеток надо «испортить», то есть сделать недоступными для Пети, ещё хотя бы 3 клетки. Пользуясь углами доски, он может ограничить такую зону в которую Петя не сможет разместить ни одну из своих фигур.

Решение: Три чёрных клетки отделяют в вершине главной чёрной диагонали одну клетку, которая становится недоступной для Пети. Четыре чёрных отделяют в вершине главной белой диагонали одну чёрную клетку, также недоступную для Пети. 10 клеток могут отрезать от остальной части доски 3 чёрных клетки.

Для Пети остаются доступными лишь 50 – 13 = 37 черных клеток.

Каждая Петина фигура содержит 2 чёрных клетки, 19 фигур требуют 38 чёрных клеток, значит, Петя не может разместить 19 фигурок.

Ответ: Нет.

Задание 3,a

Вася отметил 10 клеток в квадрате 10 × 10. Всегда ли Петя может вырезать из этого квадрата по линиям сетки 19 четырехклеточных фигурок следующего вида: квадрат 2 × 2, змея (две верхние клетки квадрата сдвинуты вправо на одну клетку), полоска (четыре клетки подряд) и Г (клетка лежащая слева на трёх), так, чтобы они не содержали отмеченные клетки? Петя может вырезать фигурки разных типов.

Размышляем: Если ответ «Да», необходимо для любого расположения клеток дать алгоритм размещения фигурок. Ответ «Нет» проще в том смысле, что достаточно найти противоречие, которое не позволит расставить фигурки. При этом Вася стремится нагадить Пете и создать такое расположение клеток, при котором задача для Пети станет неразрешимой.

Особенность фигурок – в каждой из них ровно две клетки одного цвета, две другого. Значит, можно рассматривать, например, только чёрные клетки. Вася может закрасить 10 любых чёрных клеток, значит, на доске для Пети достижимы 40 чёрных клеток. Васе за счёт расположения клеток надо «испортить», то есть сделать недоступными для Пети, ещё 3 или 4 клетки. Пользуясь углами доски, он может ограничить такую зону в которую Петя не сможет разместить ни одну из своих фигур.

Решение: На рисунке показан угол доски, пять чёрных клеток в котором закрашены. Они отрезают от остальной части доски фигуру, содержащую 2 чёрных клетки. Ни одна из этих двух и 5 закрашенных чёрных клеток недоступна для Пети.

Если Вася закрасит в двух углах по 5 чёрных клеток, для Пети останутся доступными лишь 50 – 14 = 36 черных клеток.

Каждая Петина фигура содержит 2 чёрных клетки, 19 фигур требуют 38 чёрных клеток, значит, Петя не может разместить 19 фигурок.

Ответ: Нет.

Задание 3,b

У Васи был набор из $2N + 1 > 33$ трехклеточных уголков. Петя приклеил к каждому уголку по одной клетке (сторона клетки приклеивается к стороне клетки уголка). При этом Вася получил набор из $2N + 1$ четырехклеточных фигурок. Могло ли так оказаться, что Вася не сможет сложить (без дырок и перекрытий) из получившегося набора никакой прямоугольник, используя все $2N + 1$ фигурок?

Размышляем: Если ответ «Нет», необходимо для любого вида фигурок дать алгоритм их размещения хотя бы в одном прямоугольнике. Ответ «Да» проще в том смысле, что достаточно найти противоречие, которое не позволит создать никакой прямоугольник. При этом Петя стремится нагадить Васе и создать такой набор фигурок, при котором задача для Васи станет неразрешимой.

Особенность фигурок – в каждой из них четыре клетки, ровно две клетки одного цвета, две другого, кроме случая Т – образной фигуры (одноклеточная ножка под трёхклеточной полоской.) В ней клеток одного цвета три, другого – одна. В любом прямоугольнике с чётным числом клеток поровну клеток обоих цветов. Значит, Петя может нагадить, если создаст нечётное количество Т – образных фигур, причём Васе необходимо строить прямоугольники с чётным числом клеток.

Решение: Пусть Петя создал одну Т – образную фигуру (одноклеточная ножка под трёхклеточной полоской) и $2N$ квадратов.

Допустим, что прямоугольник построить можно. Он содержит чётное число клеток, значит, у него есть сторона чётной длины и он содержит поровну по $2(2N + 1)$ чёрных и белых клеток.

Число клеток разного цвета в созданных фигурках разное, значит, построить прямоугольник нельзя.

Ответ: Да.

Задание 4

Числа a, b, c − длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что оба корня уравнения $f(x) = ax^2 + bx - c = 0$ меньше 1.

Решение: $a > 0$, значит, ветви графика уравнения направлены вверх.

$f(0) = -c < 0, f(1) = a + b - c > 0$. На промежутке (0, 1) есть один корень и этот корень — больший, так как функция возрастает.

Задание 4,а

Известно, что $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корень на интервале (0,1).

Размышления: Пусть $c = 0$. Тогда $ax^2 + bx = ax(x - 2/3) = 0$. Это уравнение имеет корни 0 и 2/3, второй на интервале (0;1). Какие значения принимает функция $ax^2 + bx + c$ в этих точках?!!

Решение: Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. $f(0) = c$.

$$\frac{9}{2} f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{9}{2}\left(\frac{2^2 a}{3^2}+\frac{2b}{3}+c\right)=2a+3b+6c-\frac{3}{2}c=-\frac{3}{2}c.$$

Если $c = 0$, то $ax^2 + bx = ax(x - 2/3) = 0$. Это уравнение имеет корни 0 и 2/3, причём второй расположен на интервале (0;1).

Если $c \neq 0$, то значения $f(x)$ на концах промежутка [0, 2/3] разные. Значит, уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ непрерывная функция, имеет корень на интервале (0, 2/3). Действительно, на отрезке [0;2/3] функция принимает все значения между $c = f(0)$ и $-1.5c = f(2/3)$, в частности, $f(x) = 0$.

Задание 5

При отборе в группу космонавтов каждый из 50 кандидатов получил одно или несколько из 10 заданий; при этом не было задания, которое получили все кандидаты. Оказалось, что у любых двух из них было общее задание. Докажите, что у каких-то двоих кандидатов было хотя бы два общих задания.

Размышляем: Особняком стоят те, кто выполнил ровно одно задание. Они не могут входить в искомую группу из двух кандидатов.

Решение: Пусть есть кандидат, который выполнил только одно задание. Оно общее у этого кандидата с любым остальным, значит, это задание выполнили все. Противоречие.

Всего заданий 10. Из них можно составить всего $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ пар заданий, которые розданы 50 кандидатам. По принципу Дирихле, есть пара кандидатов, у которых хотя бы два общих задания.

Задание 6

Известно, что некоторых углов x и y выполняются неравенства $\sin x > \cos y > 0$ и $\cos x > \sin y$. Докажите, что $\sin y < 0$.

Размышляем: Типично для доказательств использовать метод «от противного». Предполагаем противное тому, что требуется доказать, в данном случае, $\sin y \ge 0$ и ищем противоречие.

Решение: Для неотрицательных чисел $\sin x > \cos y > 0 \rightarrow \sin^2 x > \cos^2 y$.

Предположим противное тому, что надо доказать: $\sin y \ge 0$.

Тогда $\cos x > \sin y \ \ge 0 \rightarrow \cos^2 x > \sin^2 y$.

Складываем большие и меньшие части полученных неравенств:

$1 = \sin^2 x + \cos^2 x > \sin^2 y + \cos^2 y. = 1$. Противоречие.

Задание 7 (2013/14 – 10)

Дано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Вася заменяет любую звёздочку рациональным числом. Петя заменяет любую из двух оставшихся звёздочек рациональным числом. Вася заменяет последнюю звёздочку рациональным числом. Докажите, что Вася всегда может сделать так что бы разность каких-нибудь двух корней была $N = 2n$.

Решение 1. Вася заменяет свободный член на нуль $x^3 + *x^2 + *x + 0 = 0$. Если Петя пишет $x^3 + ax^2 + *x = 0$, Вася ставит в последнюю позицию число $-(N^2+a\cdot N)$.

Если Петя пишет $x^3 + * \, x^2 + ax = 0$, Вася ставит число $-(N^2+\frac{a}{N})$.

В обоих случаях у уравнения есть корни N и 0. Их разность равна N.

Решение 2. Вася заменяет коэффициент при x на $-n^2$: $x^3 + *x^2 - n^2x + * = 0$.

Если Петя пишет $x^3 + ax^2 - n^2x + * = 0$, Вася ставит в последнюю позицию $-a\,n^2$. Получаем уравнение $x^3+a\,x^2-n^2x-a\,n^2=(x^2-n^2)x+a(x^2-n^2)=(x-n)(x+n)(x+a)$.

У уравнения есть корни $n, -n, -a$. Разность двух первых $2n = N$.

Если Петя пишет $x^3 + *x^2 - n^2x + a = 0$, Вася ставит число $-\frac{a}{n^2}$.

$$x^3-\frac{a}{n^2}x^2-n^2x+a=(x^2-n^2)x-\frac{a}{n^2}(x^2-n^2)=(x-n)(x+n)(x-\frac{a}{n^2}).$$

У уравнения есть корни $n, -n, a/n^2$. Разность двух первых $2n = N$.

Задание 8 (2013/14 – 10)

В языке 2 буквы «а» и «у». Некоторые последовательности являются словами, причём в каждом слове не более, чем 13 букв. Известно что если писать подряд два любых слова, то последовательность не будет являться словом. Какое максимальное количество слов в этом языке?

Решение. Если число символов в слове не более, чем 6, то запись из двух слов подряд имеет не более, чем 12 символов и является словом, что противоречит условию.

Значит любое слово, содержит не менее, чем 7 символов.

Всего последовательностей, содержащих ровно n букв 2^n, так как в любой позиции находится одна из двух букв.

Слов всего $2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} = 2^7 (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) = 2^7 (128 - 1)$.

Ответ: $2^{14} - 2^7$.

Задание 9 (2013/14 – 10)

Дано натуральное число n, содержащее сто знаков. Известно что число n^2 не заканчивается на n, а число n^3 заканчивается на n. Докажите, что существуют по крайней мере два таких числа.

Размышляем. Числа 4 и 9 обладают рассматриваемой особенностью среди однозначных чисел. $99 = 10^2 - 1$, $99^2 = 9801$, $99^3 = 970299$.

$\frac{10^2}{2} - 1 = 49$, $49^2 = 2401$, $49^3 = 117649$.

$\frac{10^3}{2} - 1 = 499$, $499^2 = 249001$, $499^3 = 124251499$. Обобщаем закономерности.

Решение. Число $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ делится на 10^{100}.

Число $n^2 - n = n(n-1)$ не делится на 10^{100}.

Рассмотрим числа $n_1 = 10^{100} - 1$ и $n_2 = \frac{10^{100}}{2} - 1$. Каждое из них содержит сто знаков, оканчивается цифрой 9 и является одним из искомых. Их квадраты заканчиваются цифрой 1, отличной от 9.

Разность $n_1^3 - n_1 = n_1(n_1 - 1)(n_1 + 1) = (10^{100} - 1)\cdot(10^{100} - 2)\cdot 10^{100}$ делится на 10^{100}, значит, куб числа n_1 заканчивается теми же цифрами, что и число n_1.

Разность $n_2^3 - n_2 = n_2(n_2 - 1)(n_2 + 1) = (\frac{10^{100}}{2} - 1)\cdot(\frac{10^{100}}{2} - 2)\cdot\frac{10^{100}}{2} = (\frac{10^{100}}{2} - 1)\cdot\frac{10^{100} - 4}{4}\cdot 10^{100}$ делится на 10^{100}, так как и первый и второй множители целые. Значит, куб заканчивается теми же цифрами, что и число n_2.

Ответ: $10^{100} - 1$ и $n_2 = \frac{10^{100}}{2} - 1$.

Задание 10

Дана последовательность натуральных чисел, в которой числа стоят по кругу, состоящая из 10^n элементов. Другая последовательность получается если выписать НОД всех рядом стоящих чисел. Возможно ли что новая последовательность в каком-либо порядке образует последовательность из последовательных чисел.

Размышляем. НОД чисел $(k - 1)k$ и $k(k + 1)$ равен k. НОД чисел $k(k + 1)$ и $(k + 1)(k + 2)$ и равен $k + 2$. Соберём последовательность из таких чисел. Тогда НОД первого и последнего из чисел должен замкнуть последовательность слева или справа.

Для 8 чисел $k(k + 1)$,$(k + 1)(k + 2)$, $(k + 2)(k + 3)$, $(k + 3)(k + 4)$, $(k + 4)(k + 5)$, $(k + 5)(k + 6)$, $(k + 6)(k + 7)$, $(k + 7)(k + 8)$ последовательность НОД $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$, $k + 4$, $k + 5$, $k + 6$, $k + 7$. Замкнуть слева может k. Для этого последнее число должно делиться на k. Значит, $k = 8$, последовательность 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240. НОД 72 и 240 равен 8 и последовательность НОД 8,9,10,11,12,13,14,15. Всего чисел $(k + 8) – k = 8$.

Решение. Заметим, что НОД$((k + 1)k, (k + 1)(k + 2)) = k + 1$,

НОД$((k + 1)(k + 2), (k + 2)^2)= k + 2$. Это последовательные числа.

Рассмотрим k чисел $k(k + 1)$, $(k + 1)(k + 2)$, …, $(2k – 2)(2k – 1)$, $(2k – 1)(2k)$.

Последовательность НОД $k + 1$, $k + 2$, … , $(2k – 2)$, $(2k – 1)$.

Для $k = 10^n$ дробь $\frac{2\cdot(2k-1)}{k+1}$ несократимая, так как $4-\frac{2\cdot(2k-1)}{k+1}=\frac{6}{k+1}$. Значит, дробь может сократиться только на 2 или 3. Однако k чётное и остаток от деления k на 3 равен 1. Значит, НОД$((k + 1)k, 2k(2k – 1)) = k$.

Указанные числа формируют искомую последовательность.

Задание 10 (2013/14 – 10,11)

На любую клетку доски $n\times n$ можно ставить ровно одну пешку. На некоторых клетках этой доски уже стоят чёрные пешки. Найдите наименьшее количество белых пешек, которые всегда можно поставить на свободные поля этой доски так, чтобы на каждой горизонтали и каждой вертикали оказалось такое количество пешек, чётность которого совпадает с чётностью числа n.

Размышляем. Если на некоторой горизонтали или вертикали свободна ровна одна клетка, на неё обязательно нужно поставить белую пешку.

Если чёрные пешки заполняют всю доску, оставляя свободными только главную диагональ из n клеток и прилегающую к ней параллельную ей диагональ, содержащую $(n – 1)$ клетку, то число свободных клеток $2n – 1$ и на каждую необходимо поставить белую пешку.

Задача сводится к поиску механизма «отбрасывания» всех клеток горизонтали и вертикали, кроме не более, чем одной в каждой из них. Отдалённая аналогия это задача проведения ломаной без отрыва карандаша от бумаги по заданной фигуре. В той задаче ломаная легко проходит «чётные» точки, из которых выходит чётное число отрезков, но в каждой «нечётной» точке она обязана начинаться или заканчиваться.

Решение. Докажем, что $2n – 2$ пешек не всегда может хватить. Если чёрные пешки заполняют всю доску, оставляя свободными только главную диагональ из n клеток и прилегающую к ней параллельную ей диагональ, содержащую $(n – 1)$ клетку, то число свободных клеток $2n – 1$. Легко проверить, что на каждую из них необходимо поставить белую пешку.

Докажем, что $2n – 1$ пешек всегда достаточно. Заполним доску зелёными и белыми пешками следующим способом. Если на некоторых горизонталях или вертикалях пуста ровно одна клетка, ставим на неё белую пешку. Назовём это операцией «Ы».

Если таких горизонталей и вертикалей нет, ставим на любую свободную клетку зелёную пешку. Начат процесс, который назовём процесс «Ё».

На вертикали, где поставлена эта пешка, есть ещё, по крайней мере, одна свободная клетка. Ставим на неё вторую зелёную пешку.

На горизонтали, где стоит вторая зелёная пешка есть по крайней мере одна свободная клетка. Ставим на неё третью зелёную пешку. На вертикали, где стоит третья зелёная, есть по крайней мере одна свободная. Ставим на это пересечение чётвертую зелёную пешку. И так далее до момента, когда второй раз попадём на горизонталь или вертикаль. Можно считать, что ходим ладьей поочерёдно по горизонталям и вертикалям и ставим на пройденные клетки пешки. В некоторый момент мы попадём на одну из пройденных горизонталей или вертикалей. Пусть эта горизонталь или вертикаль принадлежит пешке с номером k., последняя поставленная имеет номер $m \geq k + 3$. Если $k > 1$, уберём с доски зелёные пешки с номерами меньшими, чем k. Оставшиеся зелёные пешки стоят по две на горизонталях и вертикалях, они не меняют чётность числа пешек на горизонталях и вертикалях, но уменьшают общее число свободных клеток.

Цикл процесса «Ё» завершён. Выполняем, если это возможно, операцию «Ы». Если остались пустые клетки, повторяем процесс «Ё».

В результате все клетки доски окажутся заполненными чёрными, белыми и зелёными пешками, причём число зелёных чётно на любой горизонтали и любой вертикали. На любой горизонтали и вертикали поставлена не более чем одна белая пешка. Общее число белых пешек не более, чем $2n - 1$, так как после того как на всех n горизонталях (или вертикалях) поставлено по одной последней пешке, доска окажется заполнена.

Ответ. $2n - 1$.

Задание 10а (2013/14 – 10)

10.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно ни одной) так, что бы в каждой клетке стояло не больше 1 фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

Ответ. см. предыдущую задачу.

Задание 11 (2013/14 – 11.3)

Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a. Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

Размышляем. Допустим, что искомое число ладей k. Тогда для k ладей нужно найти алгоритм закраски всей доски при любой её нумерации. Для $k - 1$ ладьи нужно придумать такую «худшую» нумерацию, при которой закраска доски окажется невозможной.

В клетку с номером 1 нужно ставить ладью.

Если клетка с номером 2 на одной горизонтали или вертикали с 1, то её можно закрасить ладьёй 1, иначе на неё нужно ставить ладью 2.

Худшая расстановка (то есть требующая наибольшее число ладей) такова, что наименьшие n номеров стоят на таких клетках, что ладьи, стоящие на этих клетках не бьют друг друга (не могут за один ход попасть на соответствующую клетку). В простейшем случае худшей расстановки наименьшие числа стоят на любой диагонали.

Для доски 2×2 одной ладьи мало, если два наименьших числа стоят на диагонали. При этом зайти на диагональ уже нельзя, значит, нужно начинать с неё. Две ладьи достаточны, так как каждая из них может закрасить свою горизонталь или свою вертикаль, если её поставить на наименьшее число этой горизонтали (или вертикали).

Доказательство. Докажем, что n ладей достаточно. На каждой горизонтали выберем клетку с наименьшим номером и на него поставим ладью. Далее, пройдём все клетки горизонтали в порядке возрастания номеров.

Докажем, что $n-1$ ладей не достаточно. Если клетки одной диагонали занумеруем числами $1,2,...,n$, то ни одна ладья не может из вне зайти на эту диагональ, так как номер любой клетки вне диагонали больше номера любой клетки на диагонали. Значит, на диагонали надо установить не менее, чем n ладей.

Прямая делит многоугольник

Докажите, что прямая, делящая пополам площадь и периметр описанного многоугольника, проходит через центр вписанной в этот многоугольник окружности.

Доказательство: Допустим противное, то есть центр окружности O не лежит на прямой MN, которая делит пополам площадь и периметр многоугольника $AB...H...Z$. Вершины многоугольника обозначим так, что A первая вершина за точкой M, H — последняя перед N, причём точка O лежит вне многоугольника $MAB...HN$. Соединим точки M и N с центром окружности O. Площадь $MAB...HNO$ определим, как сумму площадей треугольников с вершиной в точке O и одинаковой высотой, равной радиусу вписанной окружности. Эта площадь равна половине площади описанного многоугольника $AB...H...Z$, периметр которого вдвое больше, чем сумма длин оснований $MAB...HNO$. По условию, эта площадь равна площади многоугольника $MAB...HN$. Эти многоугольники различаются на треугольник MNO В рамках допущения, такое невозможно. Противоречие.

Задание 7

Докажите, что геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек ***A*** и ***B***, это плоскость, проходящая через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB***.

Геометрическое место точек – это совокупность ***всех*** точек, обладающих некоторым свойством. Поэтому, в ходе решения требуется сначала найти любым способом (можно поверить условию), где могут находиться точки, обладающие оговоренным свойством. Далее нужно обосновать два факта:

– доказать, что каждая точка найденного множества обладает оговоренным свойством;
– доказать, что никакая другая точка этим свойством не обладает.

Доказательство: Докажем, что каждая точка плоскости, проходящей через середину ***AB*** перпендикулярно ***AB***, равноудалена от данных точек ***A*** и ***B*** (обладает оговоренным свойством). Пусть точка ***C*** принадлежит плоскости, проходящей через середину ***AB*** точку ***D*** перпендикулярно ***AB***. Тогда ***CD*** перпендикулярно ***AB, AD = BD***, прямоугольные треугольники ***ADC = BDC***, значит, равны их гипотенузы ***AC = BC***■

Доказываем, что никакая другая точка этим свойством не обладает.
Пусть ***AC = BC***, причём ***C*** не принадлежит плоскости, проходящей через середину ***AB*** точку ***D*** перпендикулярно ***AB***, ***CD*** не перпендикулярно ***AB***. Так как точка ***C*** не может совпадать с ***D***, то треугольник ***ABC*** – равнобедренный. Тогда ***CD*** – его медиана, значит, ***CD*** – его высота. Как высота, ***CD*□*AB***. Значит, предположение привело к противоречию. Этим доказано, что никакая точка не принадлежащая ГМТ, этим свойством не обладает.■

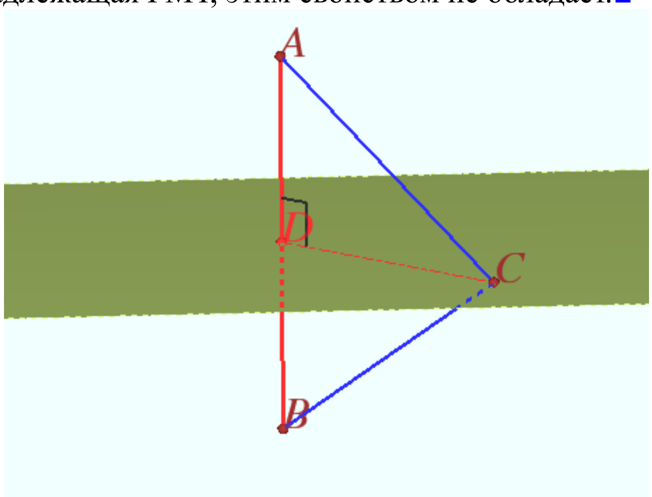


Рис. 1. Доказательство для геометрического места точек, равноудалённых от двух данных

Задание 8

Доказать, что прямая, делящая пополам площадь и периметр описанного многоугольника, проходит через центр вписанной в этот многоугольник окружности.

Факт: Площадь описанного многоугольника равна половине произведения радиуса вписанной окружности на сумму сторон многоугольника.

Доказательство: Допустим противное, то есть допустим, что центр окружности *O* не лежит на прямой *AB,* делящей пополам площадь и периметр описанного многоугольника, где точки *A* и *B* принадлежат описанному многоугольнику.

Соединим точки *A* и *B* с центром окружности *O* и рассмотрим тот многоугольник AOBC…, который содержит отрезок *AB*. Его площадь равна половине произведения радиуса на половину периметра, так как точки A и B отделяют половину периметра. Значит, эта площадь равна половине площади исходного многоугольника. Площадь многоугольника

АВС… по условию равна половине площади всего описанного многоугольника. Найденные площади отличаются на площадь треугольника *AOB*, которая, следовательно, равна нулю. Это возможно только если точка *O* лежит на *AB*. Противоречие.

Задание 9

Докажите, что для любого треугольника *ABC* расстояние *AH* от вершины до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны *BC*.

Проведем через вершины треугольника прямые, параллельные противолежащим сторонам, и обозначим точки пересечения *E,D,F*, как показано на рисунке. Возникли параллелограммы, например, *ABCE*. Пользуясь их свойствами, доказываем, что *ABC* – это треугольник средних линий треугольника *EDF*. Треугольник *EDF* подобен треугольнику *ABC* с коэффициентом 2. Отрезок *EH* перпендикулярен *EF*||*BC* и проходит через середину *EF*. Значит, точка *H* является центром описанной окружности треугольника *EDF*. Отсюда *AH* и *OM* это соответственные элементы подобных треугольников. Их отношение равно коэффициенту подобия. Значит, *AH* = 2 *OM*.

10.8. Петя поставил на доску 50х50 несколько фишек, в каждую клетку не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно ни одной) так, что бы в каждой клетке стояло не больше 1 фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

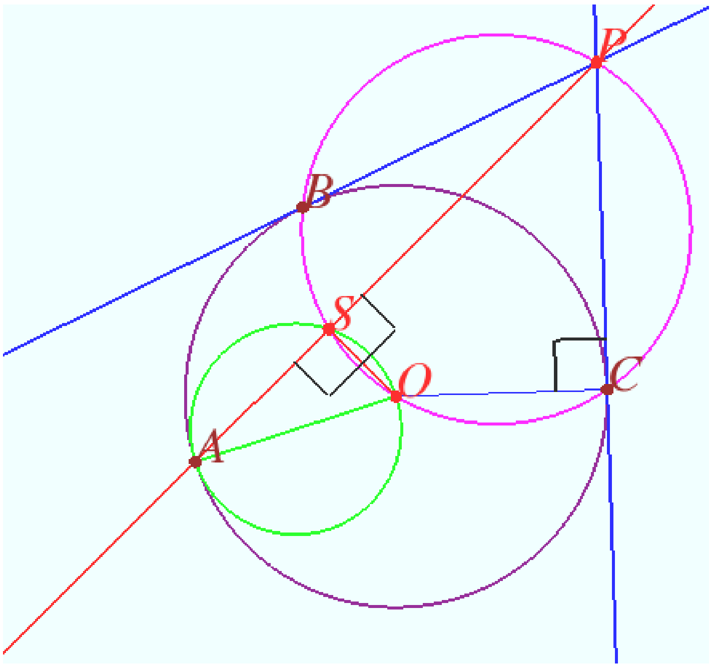
10.6. Дана последовательность натуральных чисел, в которой числа стоят по кругу, состоящая из 10^{1000} элементов. Другая последовательность получается если выписать НОК всех рядом стоящих чисел. Возможно ли что новая последовательность в каком-либо порядке образует последовательность из последовательных чисел.

10.5. Дан треугольник ABC, который вписан в окружность с центром в точке O. Окружность диаметром AO и окружность, описанная около треугольника OBC, пересекаются в точке S так, что S не совпадает с O. Две касательные PB и PC к окружности ABC пересекаются в точке P. Доказать, что точки A, S, P лежат на одной прямой.

Угол ASO прямой, он опирается на диаметр AO.

Угол PCO между касательной и хордой прямой, OP — диаметр окружности OBC.

Угол PSO прямой, он опирается на диаметр PO.



10.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно ни одной) так, что бы в каждой клетке стояло не больше 1 фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

http://rutube.ru/video/f4dcb91be6c487105961cd5fc2984e9b/

http://www.youtube.com/watch?v=uksrGNS0IEA

http://www.magicinvention.ru/we_sm/08invsm.htm